

Capítulo I - Construções Fundamentais - Desenho Básico

Os problemas em Desenho Geométrico resumem-se em encontrar pontos. E para determinar um ponto basta obter o cruzamento entre duas linhas, que podem ser retas ou circunferências.

Exercícios Básicos

01. Construir a mediatriz do segmento dado AB. Propriedade da mediatriz: é perpendicular ao segmento e passa pelo seu ponto médio.

+
A

+
B

02. Traçar por um ponto dado P, uma perpendicular a uma reta dada r.
a) Com compasso

P
+

r

b) Com esquadros

P
+



03. Traçar por um ponto dado P, uma reta paralela a uma reta dada r.

a) Com compasso

P
+

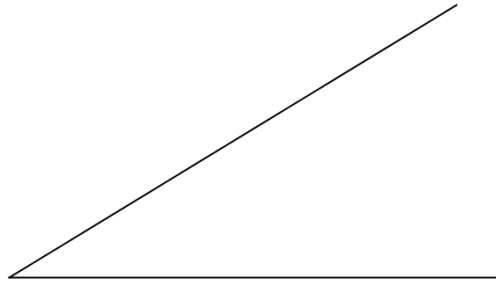


b) Com esquadros

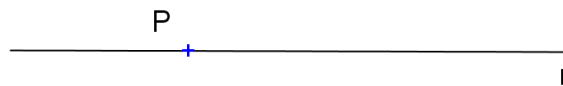
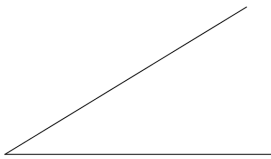
P
+



04. Construir a bissetriz do ângulo dado.



05. Transportar o ângulo dado, para a reta r, com vértice no ponto P.



06. Construir os ângulos de 30° , 45° , 60° , 90° , 120° , 135° . (compasso e esquadros)

07. Dividir um segmento AB em n partes iguais.



08. Construir, utilizando régua e compasso a circunferência pertencente aos pontos dados A, B e C.

+
A

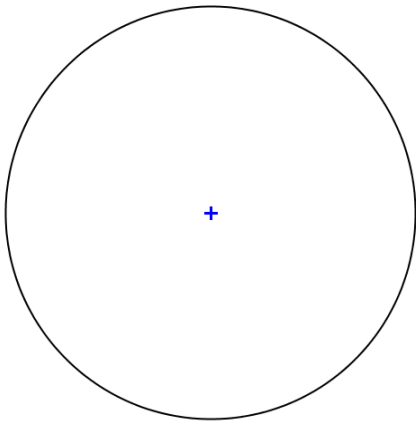
+
B

+
C

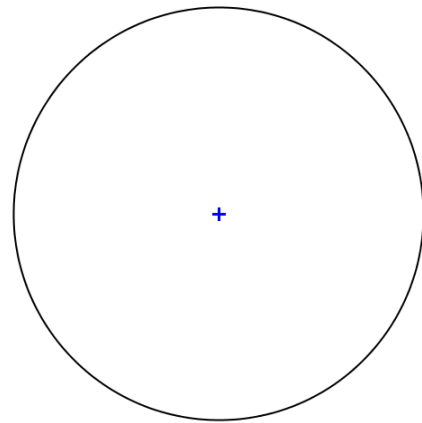
09. Construir o triângulo ABC, dados os lados: $a=7\text{cm}$, $b=6\text{cm}$ e $c=9\text{cm}$. Obter o circuncentro O (encontro das mediatrizes), o baricentro G (encontro das medianas), o incentro I (encontro das bissetrizes) e o ortocentro H (encontro das alturas).

10. Dividir a circunferência dada em 3, 4, 6, 8, 10 e 5 partes iguais, utilizando métodos exatos.

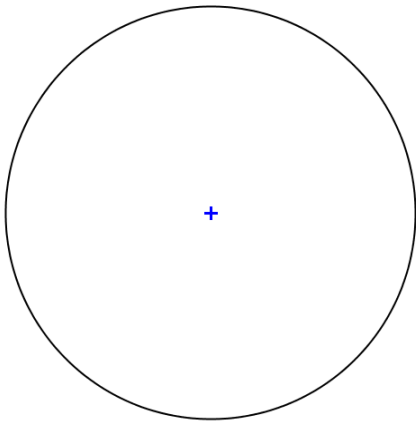
a) 3 partes - Triângulo



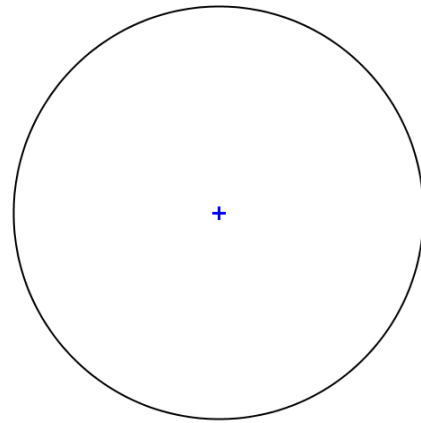
b) 4 partes - Quadrado



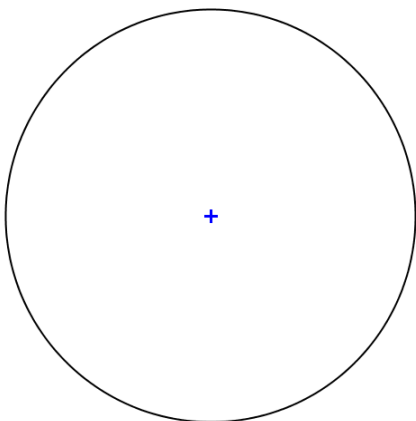
c) 6 partes - Hexágono



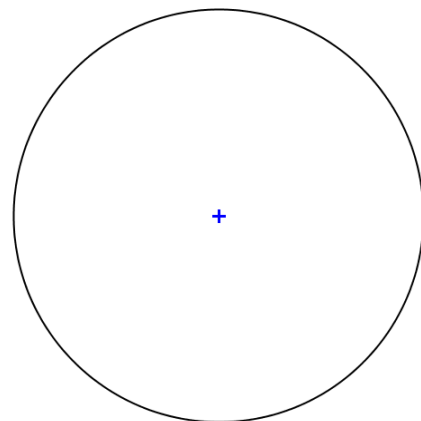
d) 8 partes - Octógono



e) 10 partes - Decágono



f) 5 partes - Pentágono



11. Construir os polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10 lados iguais, dado a medida l do lado.

l

a) Triângulo equilátero

b) Quadrado

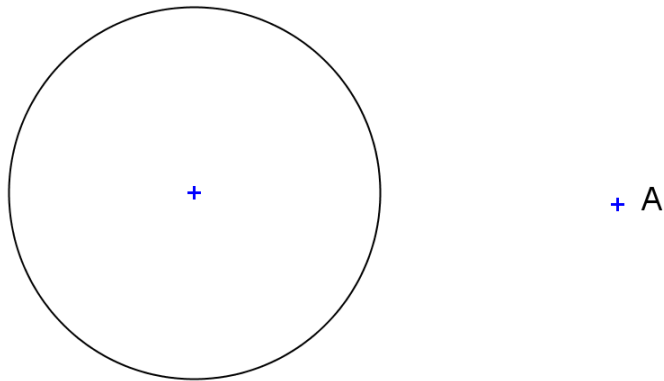
c) Pentágono Regular

d) Hexágono Regular

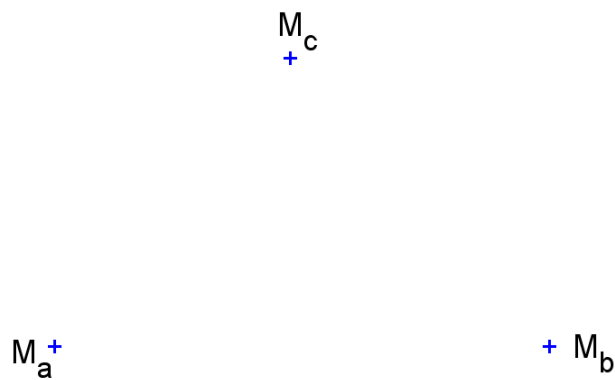
e) Octógono Regular

f) Decágono Regular

12. Traçar a reta tangente à circunferência dada que passe pelo ponto A.



13. Construir um triângulo ABC sendo dados M_a , M_b e M_c , pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente.



Capítulo II - O método das projeções Cotadas

O método foi idealizado por Fellipe Büache em 1737 para o levantamento da carta hidrográfica do Canal da Mancha. Em 1830 o método foi sistematizado pelos militares franceses. É bastante utilizado na solução de coberturas e como base para o Desenho Topográfico.

O método das projeções cotadas é um sistema gráfico-analítico que utiliza somente uma projeção do objeto estudado. Cada projeção é acompanhada de um número que representa a distância do ponto ao plano de projeção.

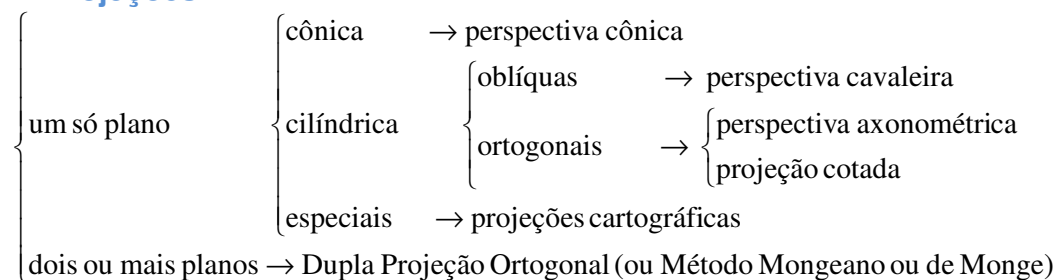
Em todo sistema de projeção, devem ser definidos os seus elementos principais que são:

- Objeto a ser projetado
- Projetante
- Plano de projeção

1. Métodos de representação

- Dupla Projeção Ortogonal (Monge)
- Projeção Cotada (Büache)
- Projeção Central (Cousinery)
- Projeção Axonométrica (Polke)

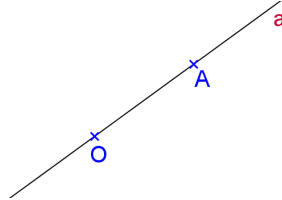
2. Projeções



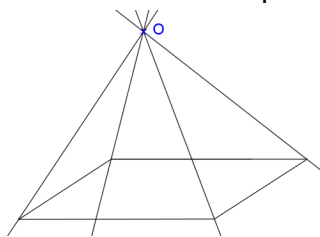
3. Operações fundamentais no desenho projetivo

3.1 Conceito de projetar

- a) Projetar um ponto A a partir de um outro ponto O, distinto de A, significa determinar a reta pertencente aos dois pontos. A reta OA é denominada projetante do ponto A, e o ponto O é denominado de centro de projeção.

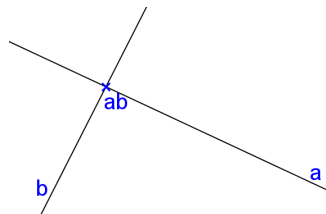


- b) Projetar um objeto a partir de um ponto O significa determinar as projetantes de todos os pontos desse objeto. Quando se quer projetar um sólido, normalmente são projetados somente os elementos necessários e suficientes que o determinam.

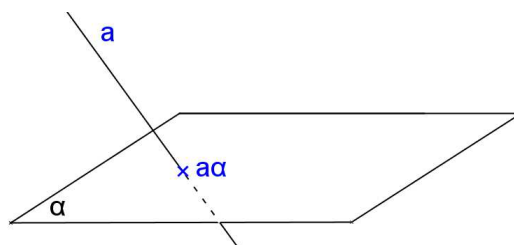


3.2 Conceito de cortar

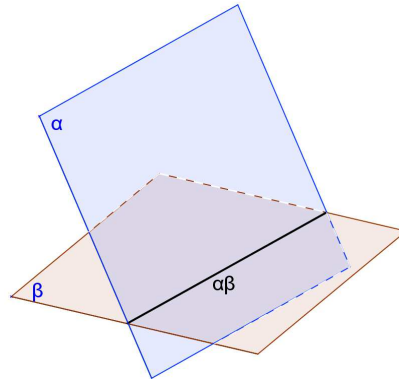
- a) Cortar uma reta a por outra b, significa obter o ponto (ab) comum às duas retas. O ponto considerado pode ser próprio ou impróprio, conforme as retas sejam concorrentes ou paralelas.



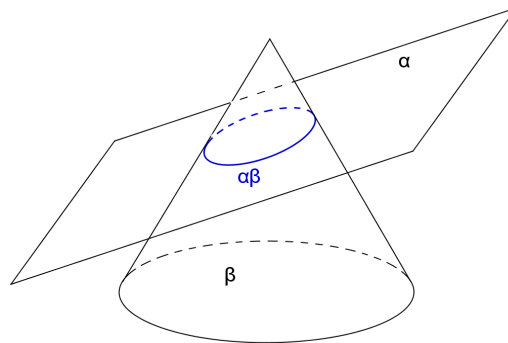
- b) Cortar um plano α por uma reta a, ou uma reta a por um plano α , significa obter o ponto ($a\alpha$) comum à reta e ao plano.



c) Cortar um plano α por um outro plano β significa encontrar a reta comum, $\alpha\beta$, a ambos os planos.



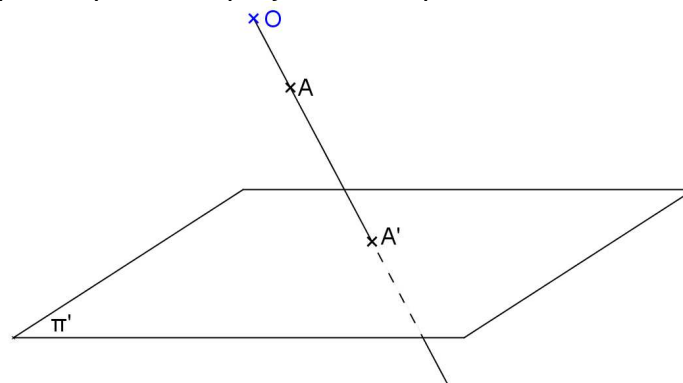
d) Cortar um objeto por um plano significa encontrar a seção plana produzida por este plano no sólido considerado.



Observação: o ponto ou a reta ou a curva quando determinados por cortes chamam-se traços.

4. Conceito de projeção cônica (ou central)

Considere um plano π' e um ponto fixo O não pertencente ao plano considerado. Denomina-se projeção central ou cônica, no plano π' , de um ponto A, distinto de O, ao traço A' , produzido sobre o plano, pela reta projetante do ponto A.



O plano π' é denominado plano de projeção e o ponto O é denominado centro, polo ou vértice de projeção.

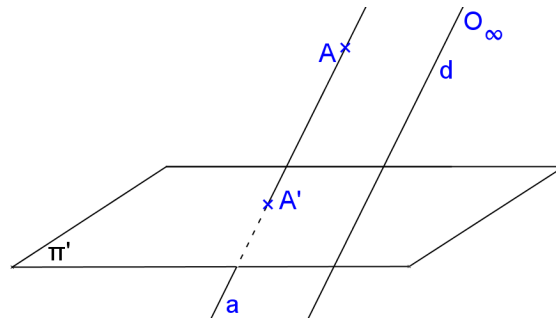
A projeção central ou cônica é também denominada perspectiva cônica, ou perspectiva linear exata do ponto A.

Observação:

- O sistema é chamado de projeção cônica, pois as projetantes descrevem uma superfície cônica.

5. Conceito de projeção cilíndrica (oblíqua ou ortogonal)

Denomina-se projeção cilíndrica de um ponto A , no plano π' a partir de O_∞ , ao traço A' produzido sobre π' , pela reta projetante do ponto A a partir do ponto O_∞ .

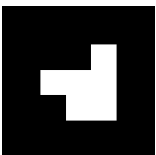
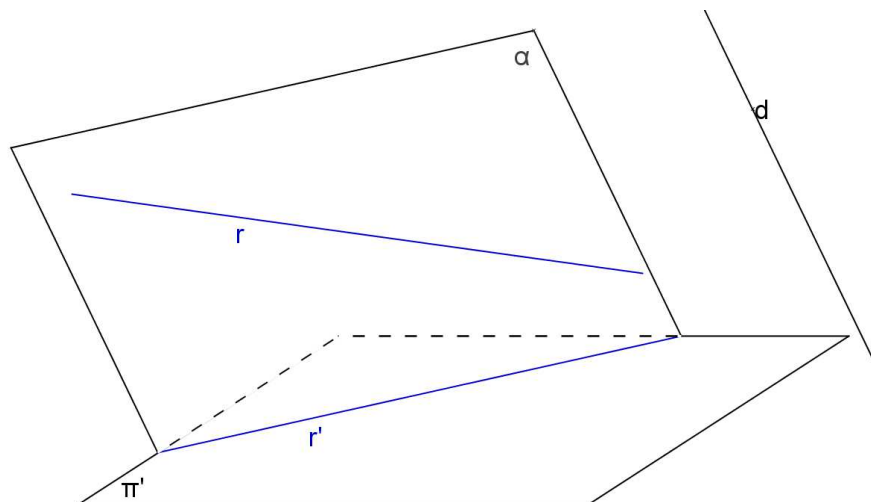


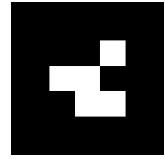
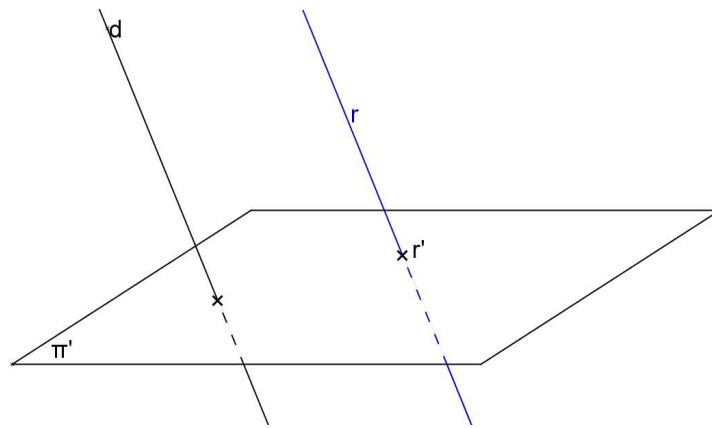
Observações:

- Dado o ponto A , A' é único, porém dado somente A' sabe-se que o ponto A pertence à reta projetante;
- O sistema é denominado projeção cilíndrica, pois as projetantes descrevem uma superfície cilíndrica;
- Os pontos do plano de projeção coincidem com suas projeções;
- Se a direção das projetantes for oblíqua ao plano de projeções tem-se o sistema de projeção Cilíndrica Oblíqua;
- Se a direção das projetantes for perpendicular ao plano de projeções tem-se o Sistema de Projeção Cilíndrica Ortogonal.

5.1 Propriedades das projeções cilíndricas (oblíquas ou ortogonais)

Propriedade 1: A projeção cilíndrica de uma reta não paralela à direção das projetantes é uma reta. A projeção cilíndrica de uma reta paralela à direção das projetantes é um ponto.

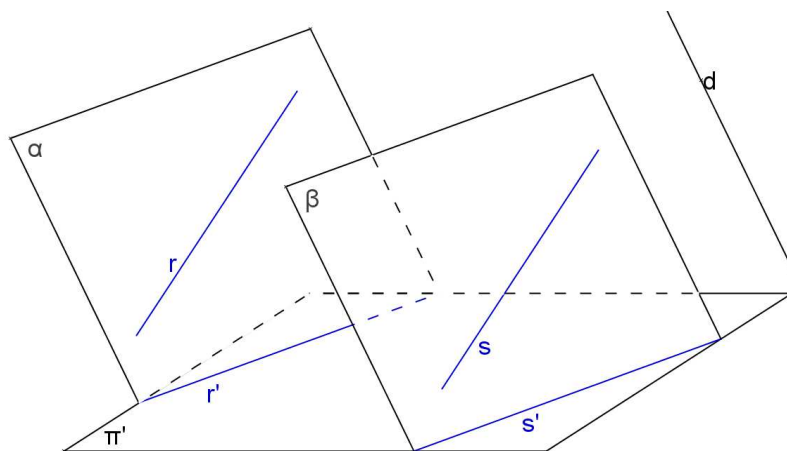


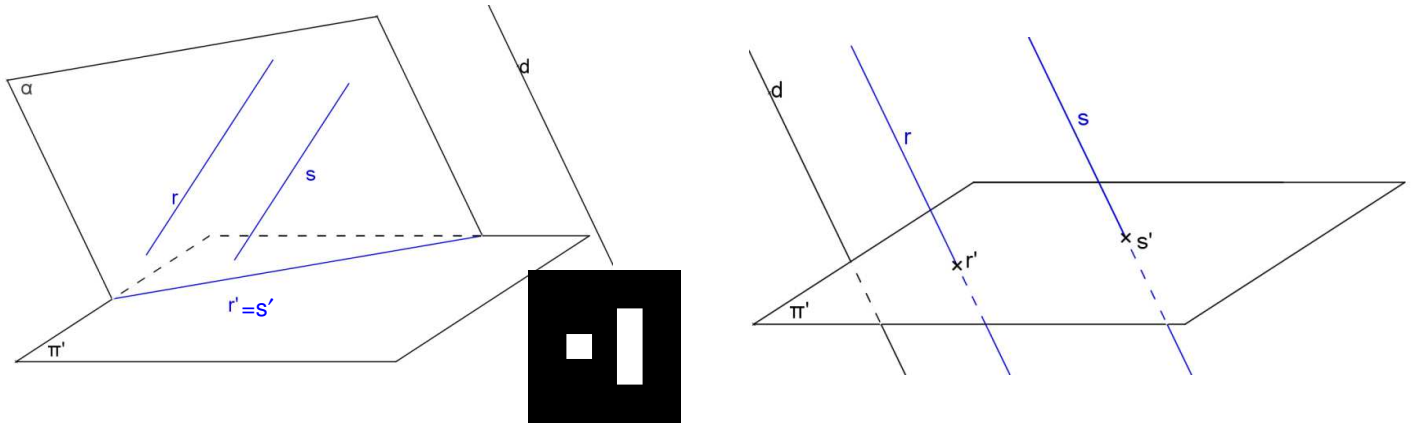


Observações:

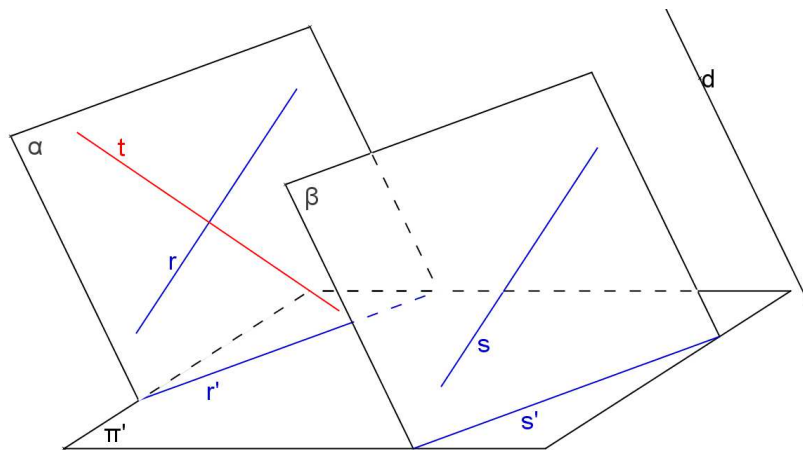
- Se a projeção cilíndrica de uma reta é uma reta, então a reta objetiva não é paralela a direção das projetantes;
- Se a projeção cilíndrica de uma reta é um ponto, então a reta é paralela à direção das projetantes;
- Se uma reta é perpendicular ao plano de projeção, sua projeção cilíndrica-ortogonal sobre o mesmo será o seu traço no plano de projeção considerado. Reciprocamente, se a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano reduzir-se a um ponto, então a reta será perpendicular ao plano de projeção, ou o que é equivalente, a reta será paralela à direção das projetantes.
- Uma reta r , não paralela à direção das projetantes, e sua projeção cilíndrica r' são coplanares; logo, pode ocorrer entre a reta e sua projeção uma das seguintes condições:
 - r e r' são concorrentes, neste caso a reta corta o plano de projeção;
 - São paralelas, neste caso a reta será paralela ao plano de projeção;
 - São coincidentes, neste caso a reta estará contida no plano de projeção.

Propriedade 2: Se duas retas r e s são paralelas, então as suas projeções cilíndricas ou são paralelas, ou são coincidentes ou são pontuais.





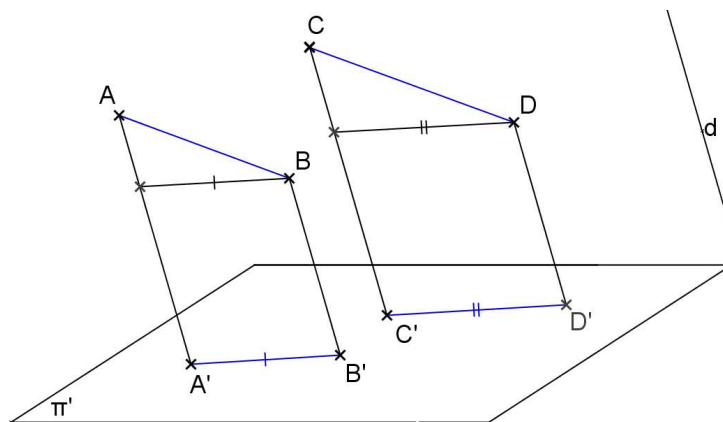
Observação: A recíproca da propriedade 2 não é verdadeira (Figura 16). Ou seja, se $t'//s'$ não implica que $t//s$.



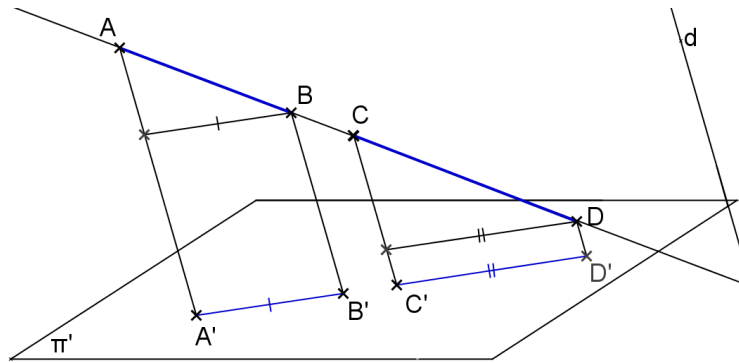
Propriedade 3: Se dois segmentos são paralelos ou são colineares, então a razão entre eles no espaço conserva-se na projeção cilíndrica, desde que a direção dos segmentos não seja paralela à direção das projetantes.

$$\text{Se } \begin{cases} \overline{AB} // \overline{CD} \\ \text{ou} \\ \text{colineares} \end{cases} \text{ e não paralelos a } d \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

a) $AB//CD$

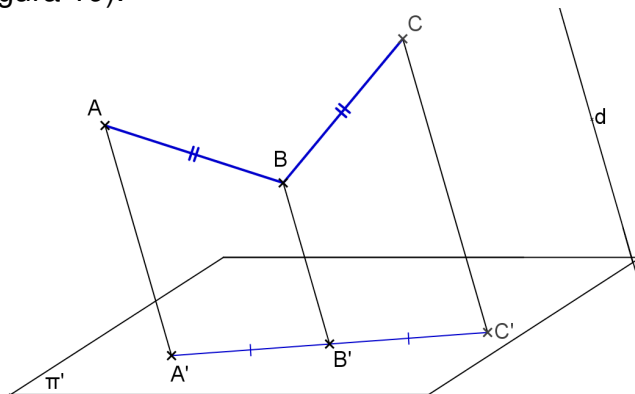


b) AB e CD colineares

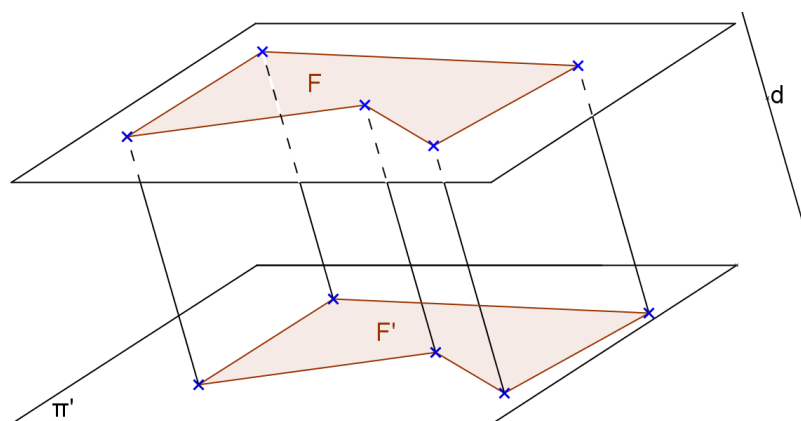


Consequência: Se M é ponto médio do segmento AB então M' é ponto médio da projeção do segmento AB (A'B').

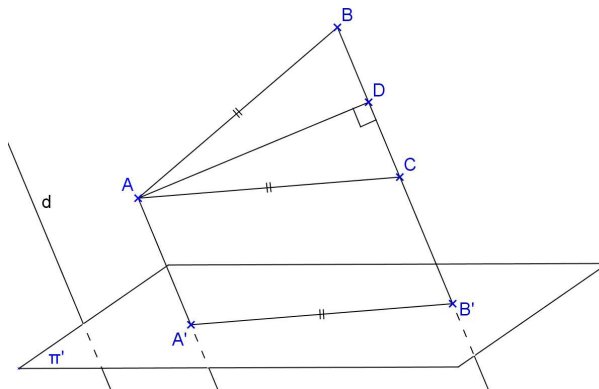
Observação: A recíproca não é verdadeira. Ou seja, se $AB/CD=A'B'/C'D'$ não implica que $AB//CD$ ou colineares (Figura 19).



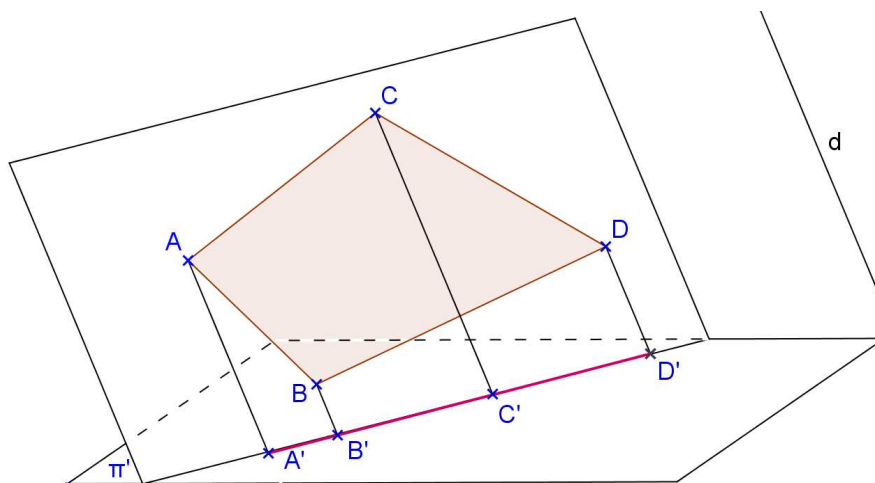
Propriedade 4: Se uma figura está contida num plano paralelo ao plano de projeção, então essa figura será congruente à sua projeção cilíndrica, isto é, a projeção cilíndrica desta figura está em verdadeira grandeza (VG).



Observação: A recíproca não é verdadeira em projeção oblíqua, porém é verdadeira em projeção ortogonal.



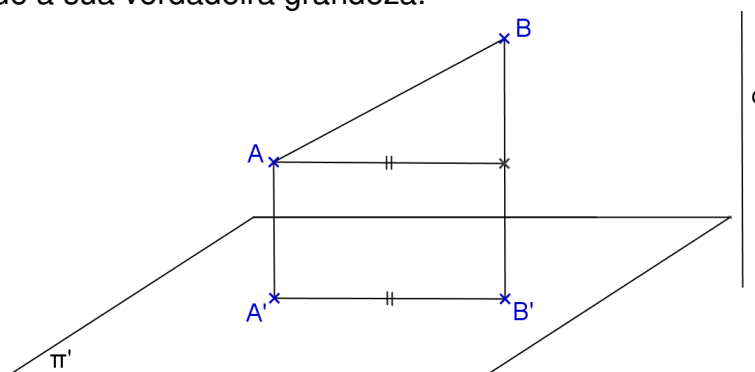
Propriedade 5: Qualquer figura contida num plano paralelo a direção das projetantes tem para projeção um segmento que está contido no traço do plano dessa figura sobre o plano de projeção.



Observação: A recíproca da Propriedade 5 é verdadeira.

5.2 Propriedades das projeções cilíndricas ortogonais

Propriedade 6: Se um segmento é oblíquo ao plano de projeção π' , então sua projeção ortogonal é menor que a sua verdadeira grandeza.

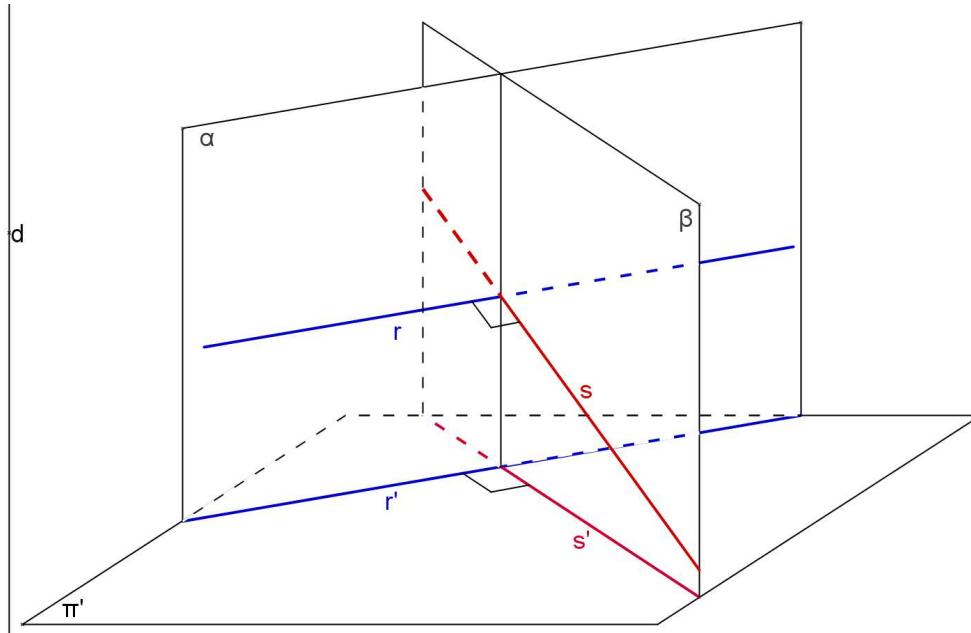


Observação: A recíproca da Propriedade 6 é verdadeira.

Propriedade 7: Se duas retas são perpendiculares ou ortogonais entre si, sendo uma delas paralela ou pertencente ao plano de projeção e a outra não perpendicular a esse plano, então as projeções ortogonais dessas retas são perpendiculares entre si.

Resumindo:

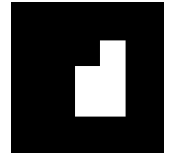
$$\begin{array}{l} r \perp s \text{ ou } r \perp s \quad (1) \\ \text{Se } r // \pi' \text{ ou } r \subset \pi' \quad (2) \Rightarrow r' \perp s' \quad (4) \\ s \not\perp \pi' \quad (3) \end{array}$$



Observação: As recíprocas da propriedade 7 são verdadeiras. São elas:

Recíproca 1: (2) + (3) + (4) \Rightarrow (1)

Recíproca 2: (1) + (4) \Rightarrow (2) + (3)



Exercícios:

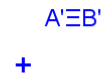
Considere um sistema de projeção cilíndrica com somente um plano de projeção π' . Escrever ao lado de cada exercício as propriedades geométricas e as propriedades das projeções cilíndricas utilizadas.

1. Representar o ponto médio M do segmento dado AB.

a)

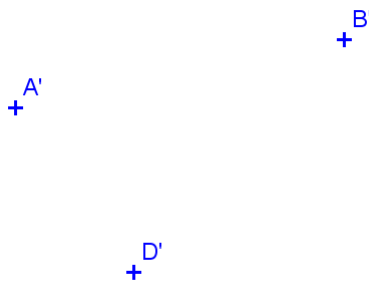


b)

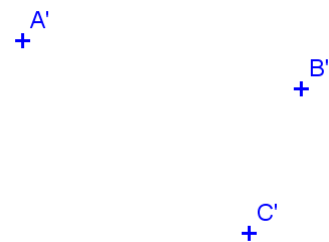


2. Representar o paralelogramo ABCD sendo dados três de seus vértices.

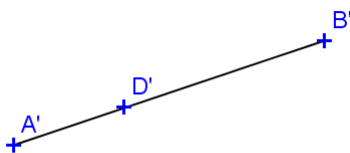
a)



b)



c)

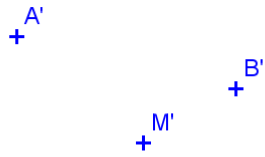


d)

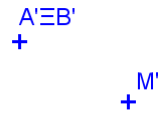


3. Representar o paralelogramo ABCD sendo dados os pontos A e B e o ponto M de interseção das diagonais.

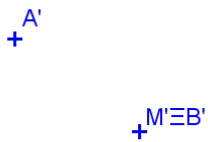
a)



b)

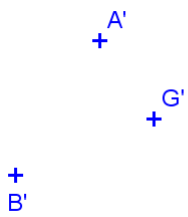


c)

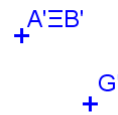


4. Representar o triângulo ABC sendo dados os vértices A e B e o baricentro G.

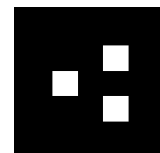
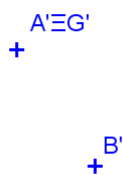
a)



b)

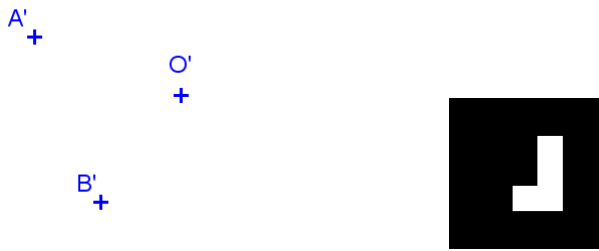


c)

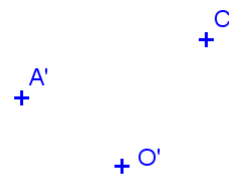


5. Representar o hexágono regular ABCDEF sendo dados dois vértices e o centro O da circunferência circunscrita.

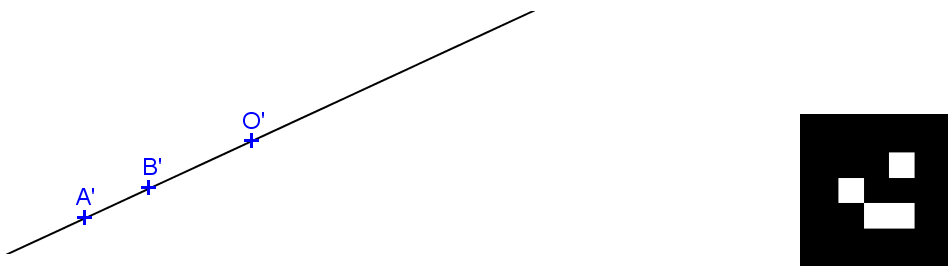
a)



b)

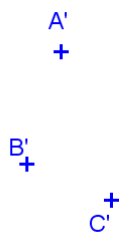


c)

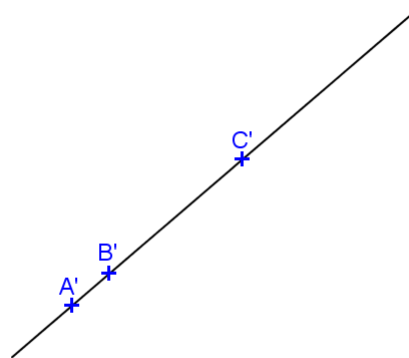


6. Representar o hexágono regular ABCDEF sendo dados A, B e C

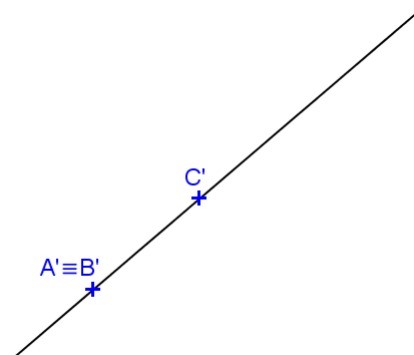
a)



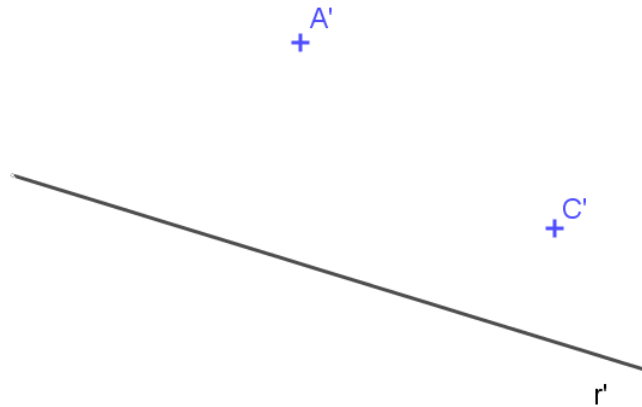
b)



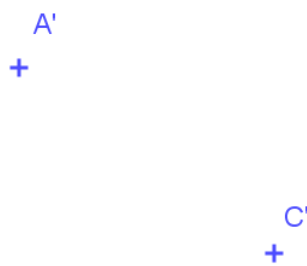
c)



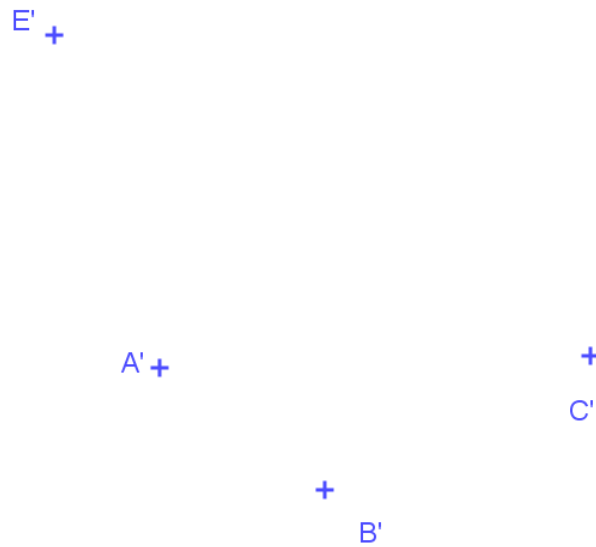
7. Represente a projeção cilíndrica ortogonal de um losango ABCD, sabendo-se que a diagonal AC está paralela a π' , dada a projeção da reta r que é o lugar geométrico do ponto B.



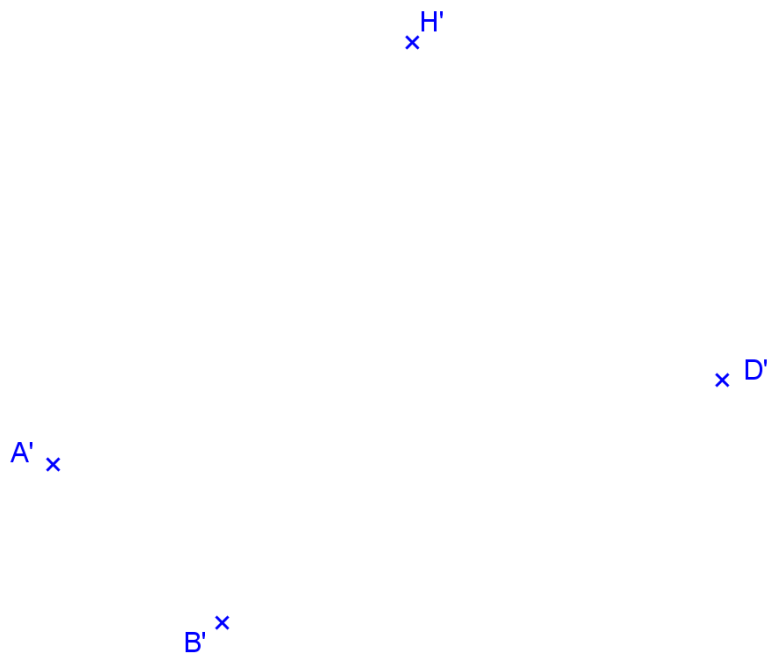
8. Represente a projeção cilíndrica ortogonal de um retângulo ABCD, dadas as projeções dos vértices A e C, sabendo-se que o lado AB é paralelo a π' e mede 3cm.



9. Represente a projeção do paralelepípedo ABCDEFGH sendo dadas as projeções de A, B, C e E.



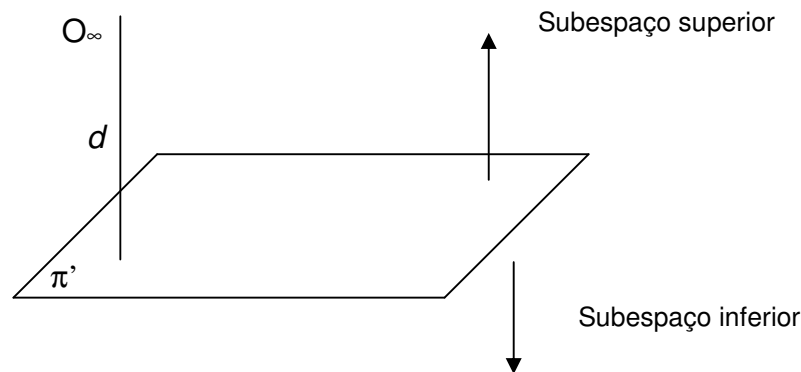
10. Represente as projeções cilíndricas do prisma ABCDEF-GHIJKL de base hexagonal, dadas as projeções dos vértices A, B, D e H.



Capítulo II – Representação do ponto

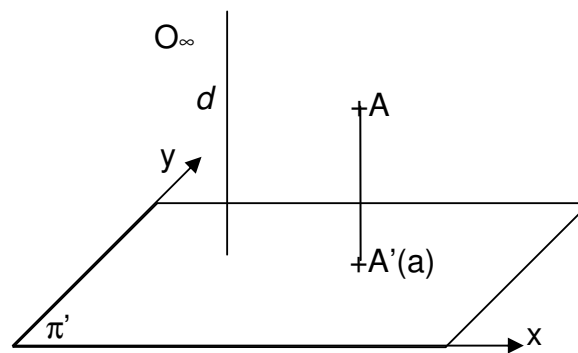
1. O plano de representação

O plano π' situado na posição horizontal denomina-se Plano (ou Quadro) de Representação ou Plano de Projeção. Este plano divide o espaço em dois subespaços: superior e inferior. O centro de projeções, O_∞ , é impróprio, pois a projeção é ortogonal.



2. Representação do ponto

Seja o ponto A , considere sua projeção cilíndrica ortogonal A' sobre o plano π' . O ponto A não fica individualizado somente por sua projeção A' , é necessário mais um elemento, utiliza-se a cota do ponto. Assim, o ponto A fica representado por $A'(a)$.



O método de projeção cotada é um sistema gráfico-algébrico, pois envolve uma projeção gráfica e um número.

A cota de um ponto é o número que expressa a distância do ponto P ao plano de projeção.

- Cota positiva = altura ou altitude
- Cota negativa = profundidade ou depressão
- π' é o lugar geométrico dos pontos de cota nula
- Os pontos de mesma cota constituem um plano paralelo ao π' .
- Os pontos pertencentes a um mesmo plano horizontal possuem a mesma cota.

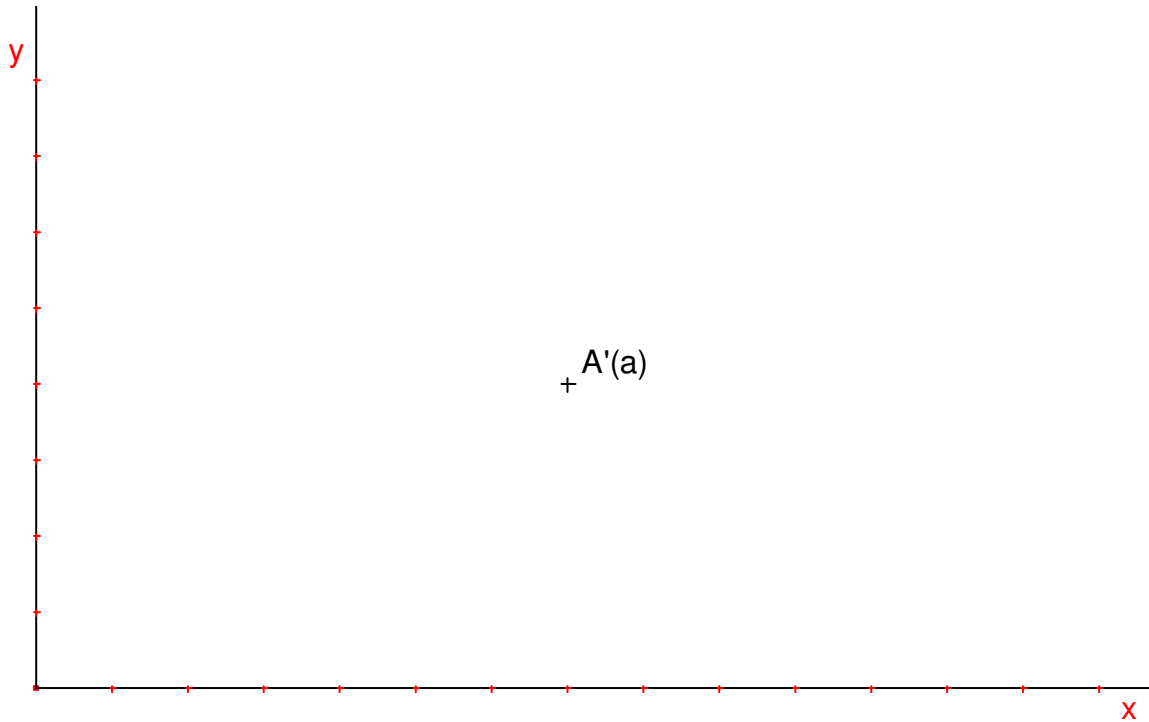
2.1. Épura do ponto

A épura do ponto é a representação plana da figura espacial. O ponto fica determinado no sistema cartesiano, pelas suas coordenadas cartesianas, $A(x, y, z)$, onde:

x – representa o valor no eixo das abscissas;

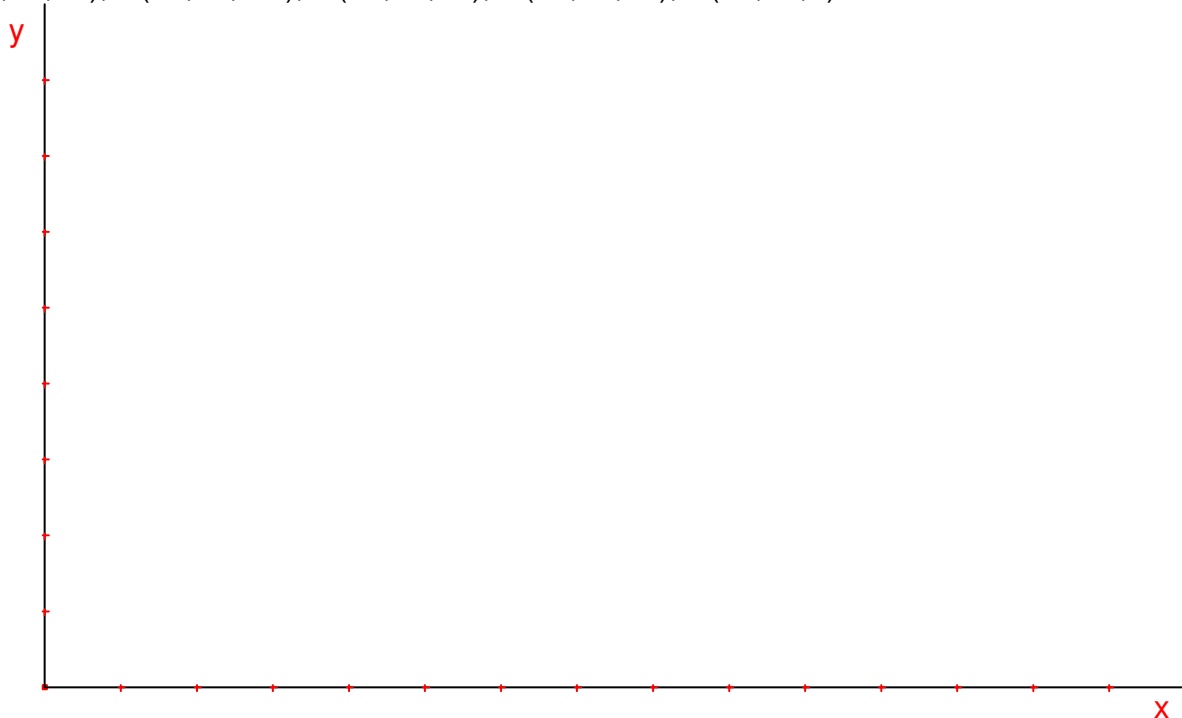
y – representa o valor no eixo das ordenadas;

z – representa o valor de cota do ponto, ou seja, sua distância até o plano π' .



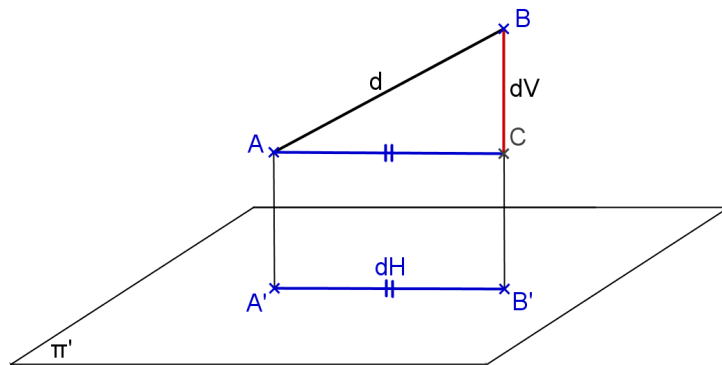
Exercício: Representar a épura dos pontos dados, utilizando como unidade o mm e a escala natural.

$A(40,30,20)$, $B(20,60,-30)$, $C(90,70,40)$, $D(90,70,10)$, $E(80,40,0)$



2.2 Distância entre dois pontos

Para obter a distância d entre os dois pontos A e B, ou seja, a verdadeira grandeza (VG) do segmento AB, pode-se utilizar o processo gráfico ou algébrico.



Distância vertical: $dV = b-a $ Distância horizontal: $dH = A'B'$ Distância $d^2 = dV^2 + dH^2$

FIGURA 28 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

No processo algébrico, caso as cotas sejam diferentes, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo; se os pontos possuem a mesma cota, então a distância entre eles é $d=dH$ e se possuem a mesma reta projetante, então a distância entre eles é $d=dV$.

No processo gráfico, se os pontos possuem cotas distintas e projetantes distintas aplica-se o rebatimento; se os pontos possuem a mesma cota então a VG do segmento AB é $A'B'$; e se pertencem a uma mesma reta projetante, então basta encontrar a diferença entre cotas dos pontos.

2.3 Rebatimento do plano projetante α sobre π' :

Basta rebater o plano projetante α do segmento AB em torno do eixo $\alpha\pi'$, obtendo-se a verdadeira grandeza (VG) da distância d entre A e B, bem como a distância horizontal dH e a vertical dV (Figura 29).

No espaço:

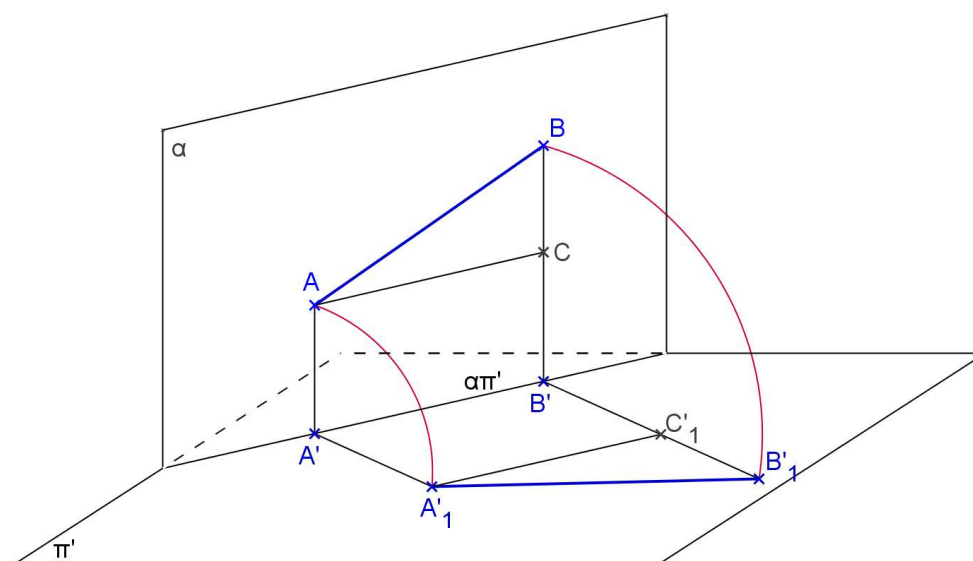
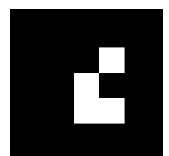


FIGURA 29 – REBATIMENTO DO PLANO α



Exercício: Encontrar, graficamente, a VG do segmento dado. Considerar a unidade como sendo o milímetro.

- a) b)



2.4 Rebatimento do plano projetante α sobre β horizontal:

Basta rebater o plano projetante α do segmento AB em torno do eixo $\alpha\beta$ obtendo o segmento A_1B_1 , cuja VG é o segmento $A'_1B'_1$ (Figura 30).

No espaço:

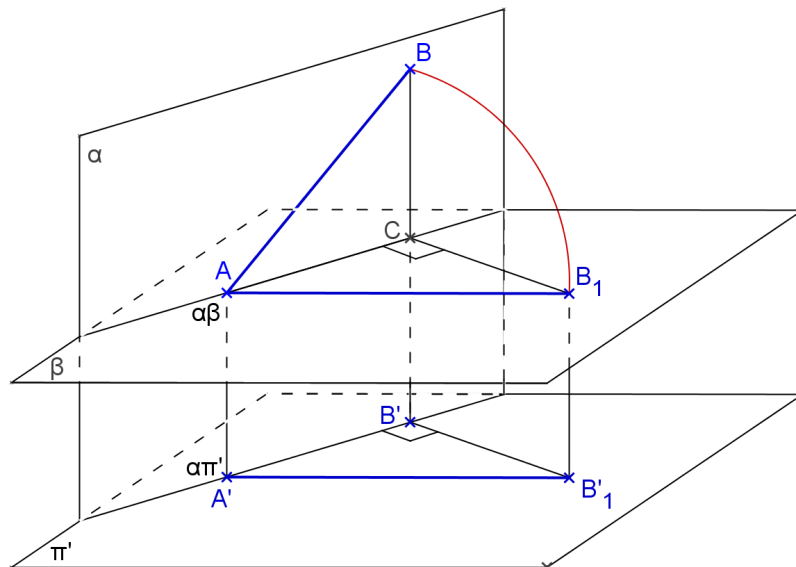


FIGURA 30 – REBATIMENTO DO PLANO α SOBRE β HORIZONTAL

Exercício: Encontrar a VG do segmento AB rebatendo sobre um plano β paralelo ao π' .

- a) b)



Exercícios Propostos

1. Representar a distância entre os pontos dados.
u mm

a) A(50,40,100) e B(100,80,60)



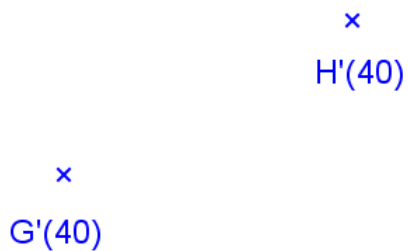
b) C(40,70,20) e D(60,30,-30)



c) E(30,60,100) F(30,60,80)



d) Dados em posição G e H



2) Na planta de um terreno foram assinalados dois pontos, um de cota 26m e outro de cota 17m. Sabendo-se que o desenho está na escala 1:100 e que em planta a distância entre os pontos é de 8cm, determinar a distância entre os pontos.

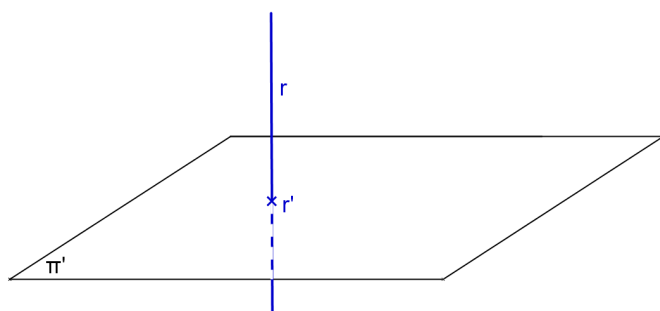
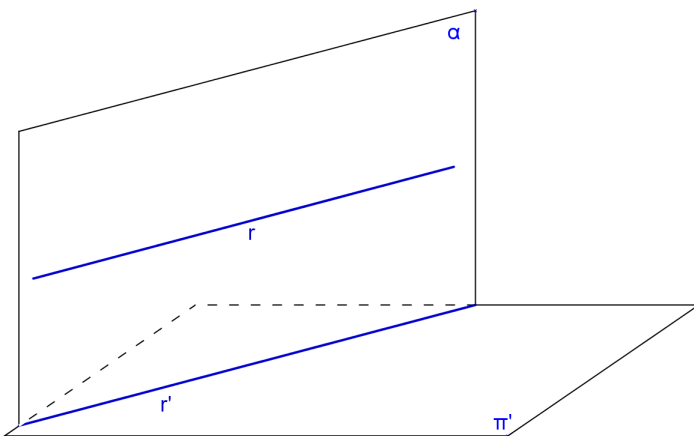
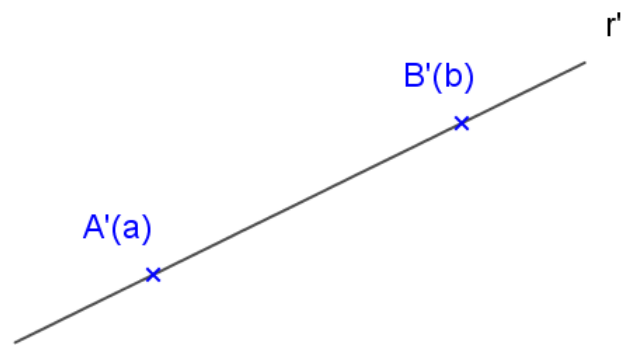
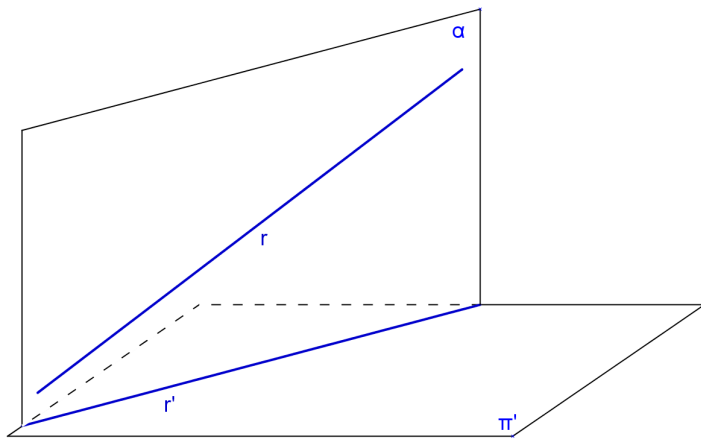
Capítulo III – Representação da reta

1. Representação da reta

Propriedade já vista: Se r é uma reta então r' ou é uma reta (se r não for paralela à direção das projetantes d) ou um ponto (se r for paralela a direção das projetantes d)

Espaço

Épura

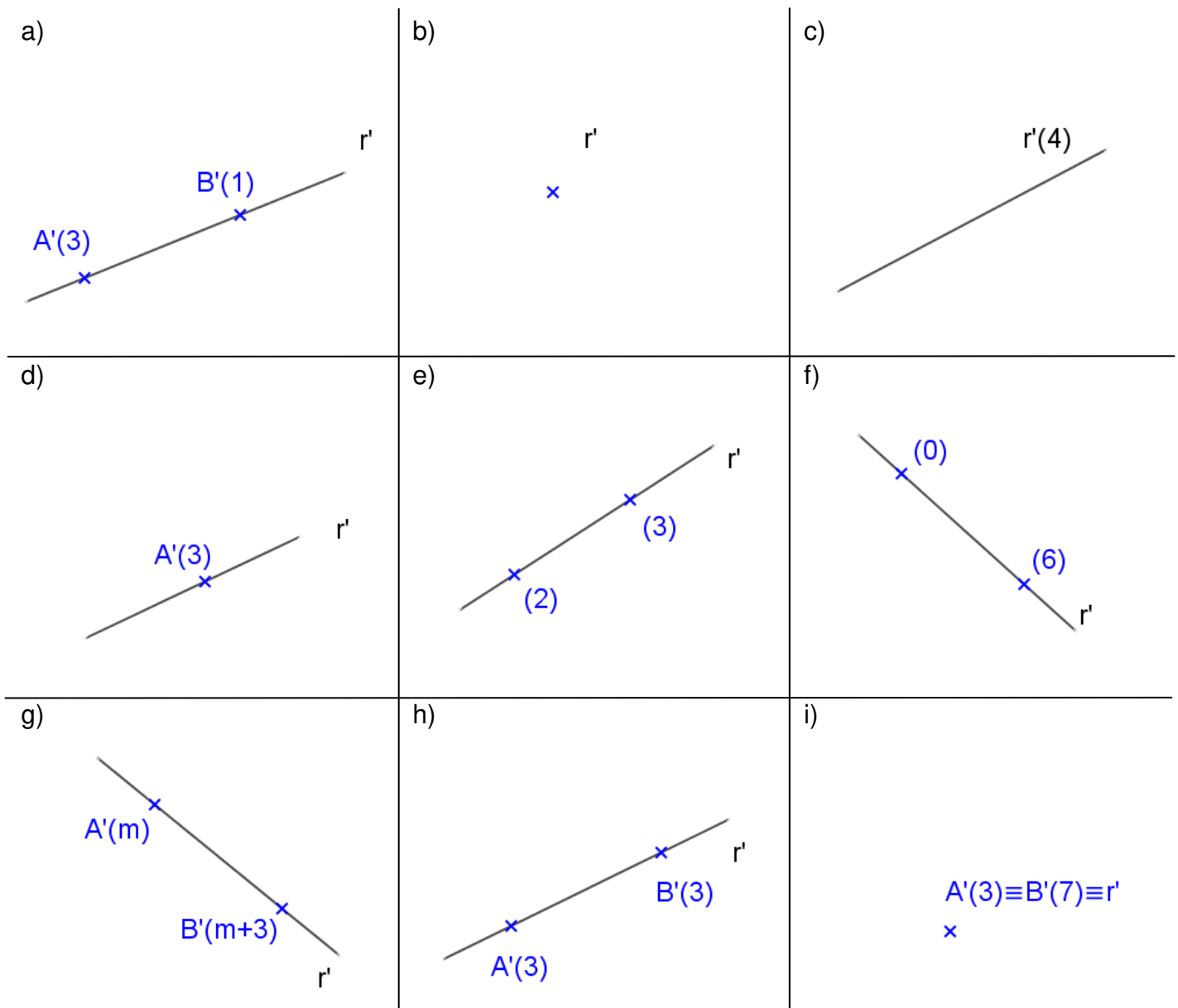


2. Posições relativas de uma reta em relação ao Plano de Projeção

A reta pode ocupar posições distintas em relação ao Plano de Projeção, podendo ser:

- 1º) Reta qualquer: a reta qualquer é oblíqua em relação a π' , forma ângulo entre 0° e 90° com π' e todos os seus pontos possuem cotas distintas.
- 2º) Reta horizontal ou de nível: a reta de nível é paralela a π' , forma ângulo de 0° com π' e todos os seus pontos possuem a mesma cota.
- 3º) Reta vertical: a reta vertical é perpendicular a π' (reta projetante), forma ângulo de 90° com π' e todos os seus pontos tem projeções coincidentes com o traço da reta.

Exemplos:



3. Elementos de uma reta

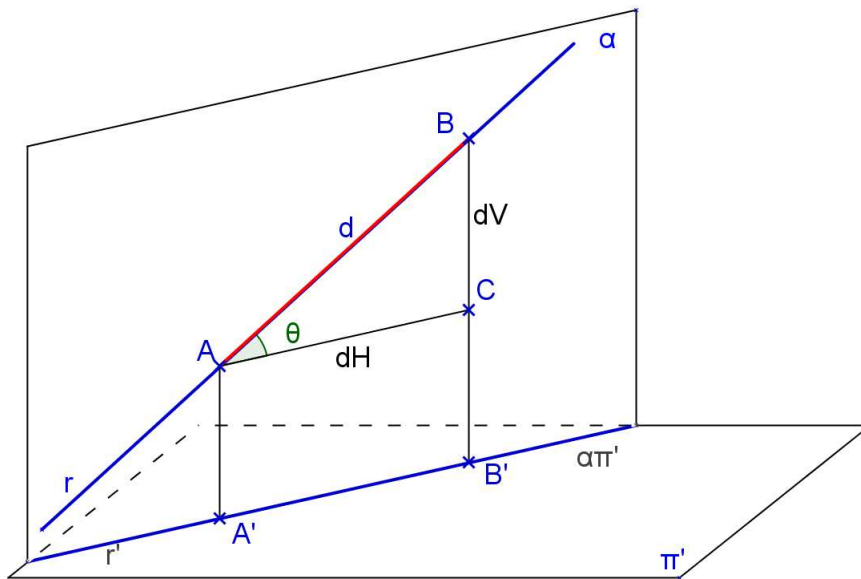
1º) Inclinação

A inclinação de uma reta é o menor ângulo θ que essa reta forma com o plano de representação, e pode ser obtido algebricamente, da seguinte forma:

como $\text{tg } \theta = \frac{dV}{dH}$, onde $dV = b - a$ (diferença de cotas dos pontos) e $dH = A'B'$ (projeção de AB)

então $\theta = \text{arc tg } \frac{dV}{dH}$

Ou graficamente pelo rebatimento do plano projetante α da reta r .



2º) Coeficiente de redução

O coeficiente de redução é dado por $\rho = \cos \theta = \frac{dH}{d}$

3º) Declive:

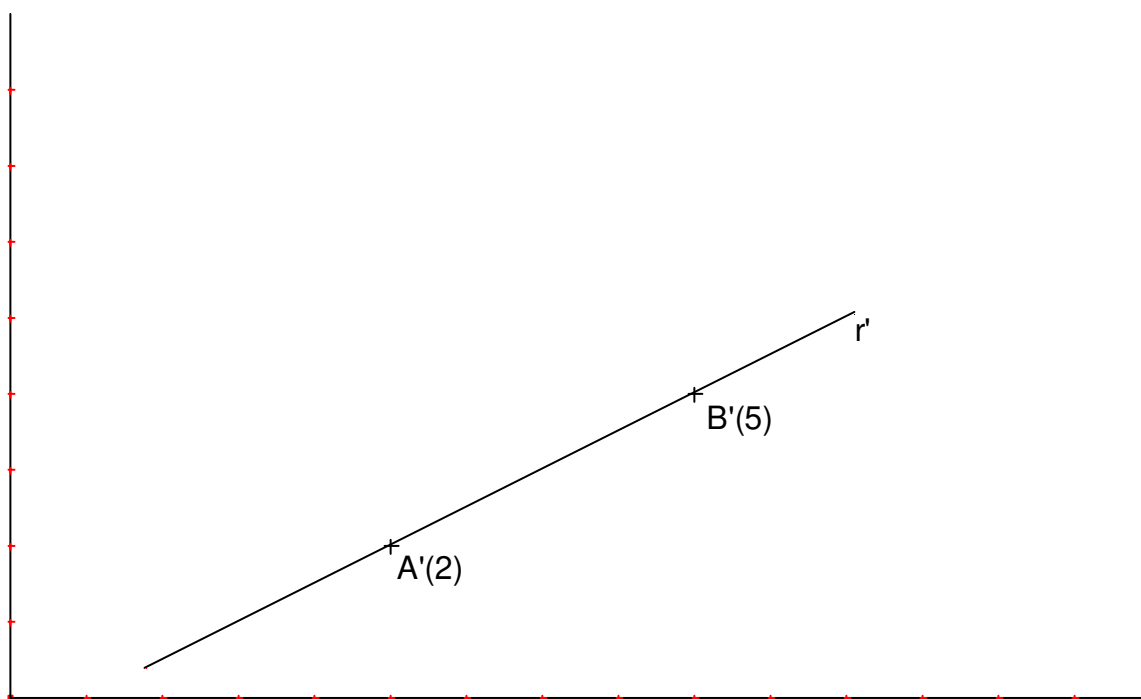
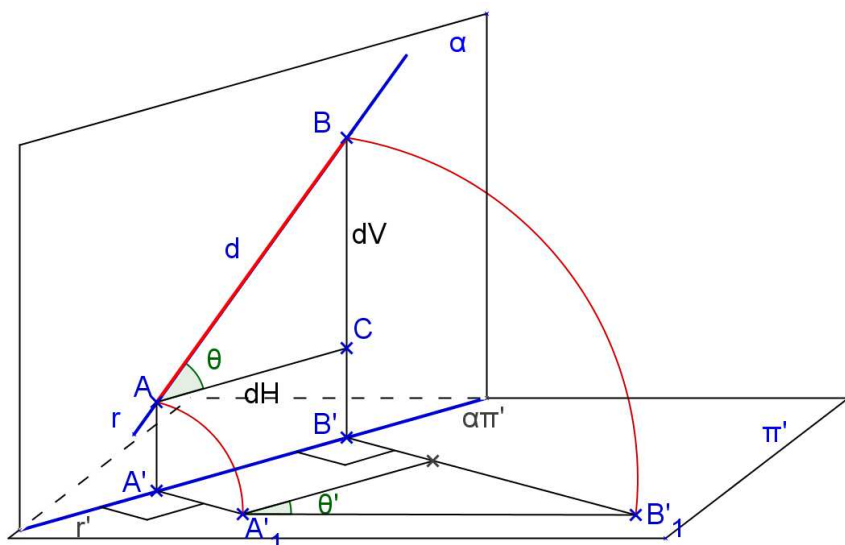
O declive de uma reta é a tangente da sua inclinação, ou seja, $de = \text{tg } \theta = \frac{dV}{dH}$

É comum exprimir o declive em porcentagem em vez de uma fração ou de um número decimal. Assim, em vez de se dizer, por exemplo, declive igual a $\frac{3}{5}$ ou 0,6, usa-se dizer declive igual a 60%. Para inclinação zero não há declive. Para inclinação 90° o declive é infinito. E para inclinação 45° o declive é 100%.

O declive também é chamado de declividade ou rampa. Se considerarmos o sentido: chamamos de declive quando as cotas diminuem e aclave quando aumentam.

Exercício

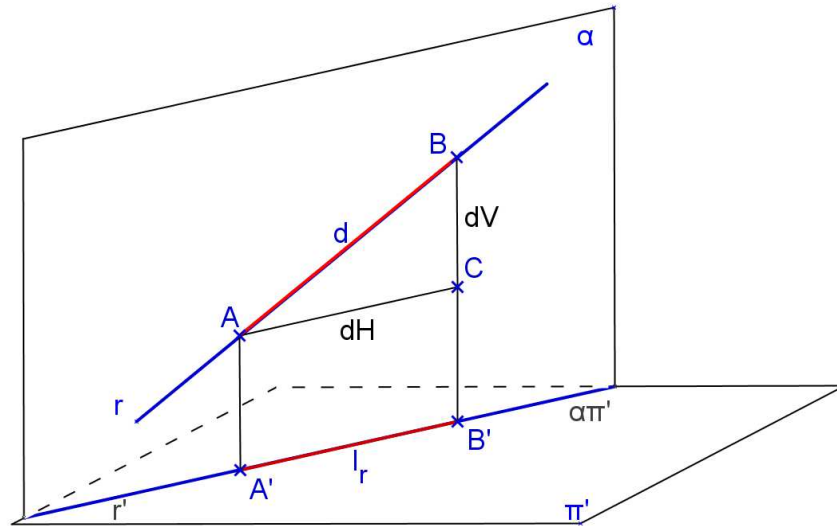
Obter a inclinação da reta $r(A,B)$ e a VG do segmento AB. Obter seu coeficiente de redução e seu declive.



4º) Intervalo

O intervalo é uma distância horizontal de dois pontos de uma reta tais que a diferença de suas cotas seja igual a unidade.

Sejam A e B tais que $|b-a|=1$ unidade, sendo a e b as cotas dos pontos, respectivamente, então o intervalo $l = dH = A'B'$.



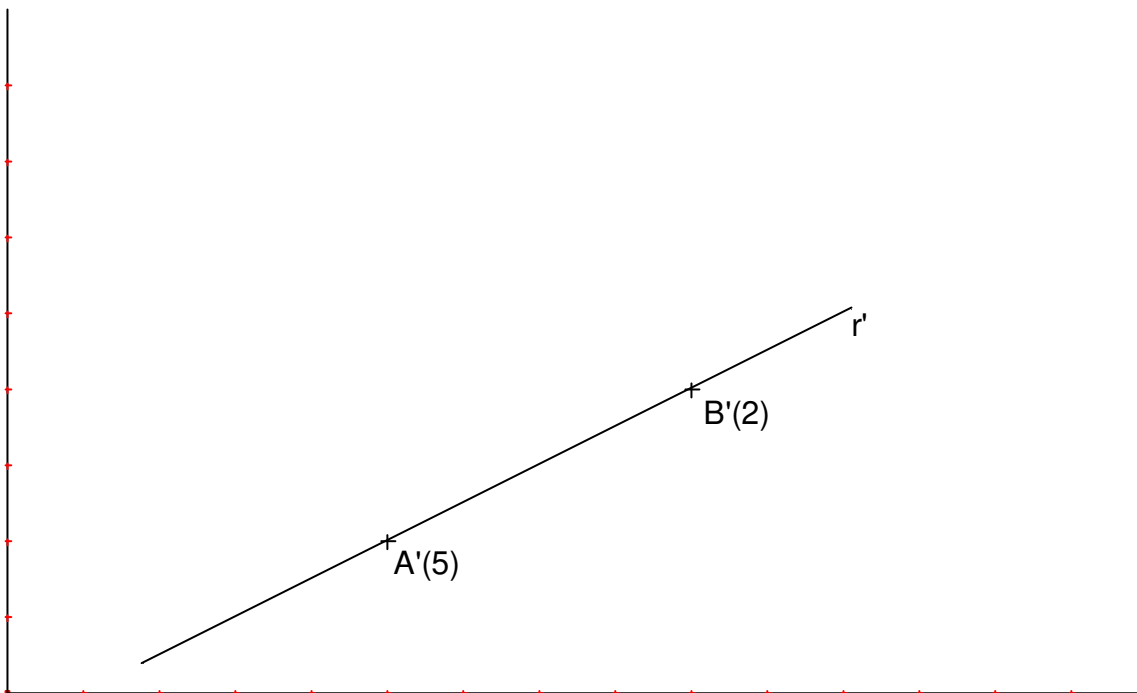
O declive é o inverso do intervalo unitário, pois:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dV}{dH} = \frac{b-a}{A'B'} = \frac{1}{A'B'} \therefore \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{A'B'} \Rightarrow A'B' = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

A equidistância é um múltiplo do intervalo.

Exercício:

Representar o intervalo da reta dada $r(A,B)$



5º) Escala de declive – Graduar uma reta

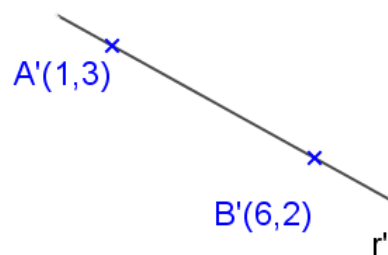
A escala de declive de uma reta r é a figura que se obtém representando sobre sua projeção r' as projeções dos pontos de cotas inteiras. Graduar uma reta é obter a escala de declive.

- Marcando os pontos de cotas inteiras e consecutivas teremos o intervalo da reta.
- Representamos por g_r a graduação da reta r (pontos de cotas inteiras).

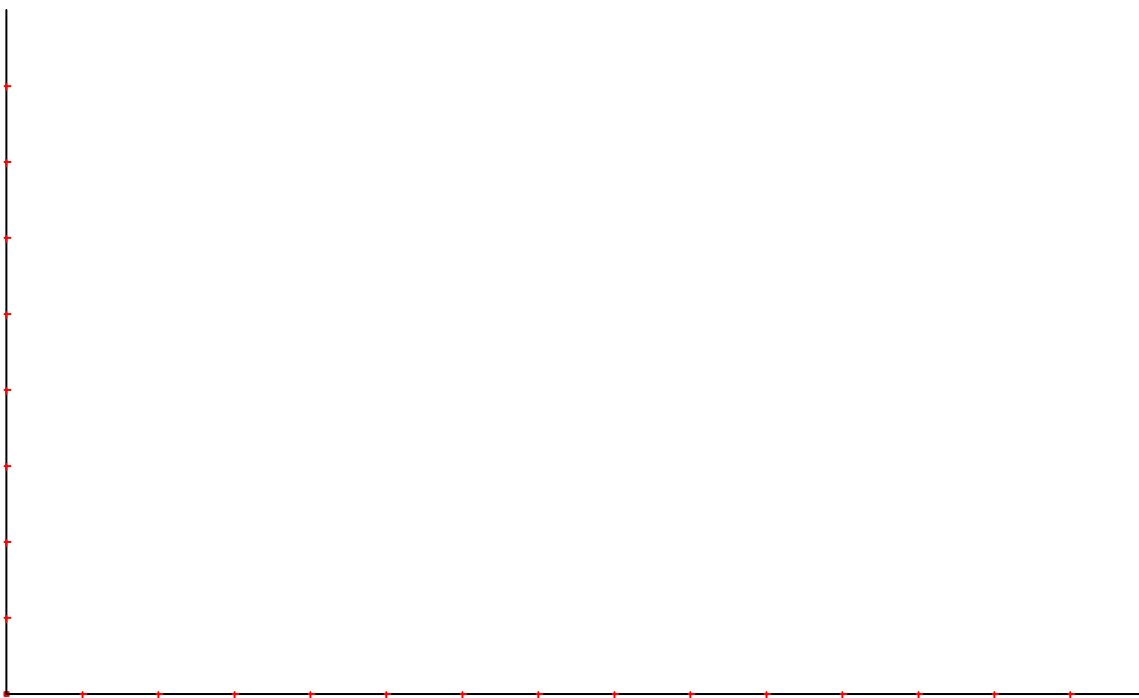
Exercício

Graduar a reta r definida pelos pontos A e B. A unidade é o cm.

a)



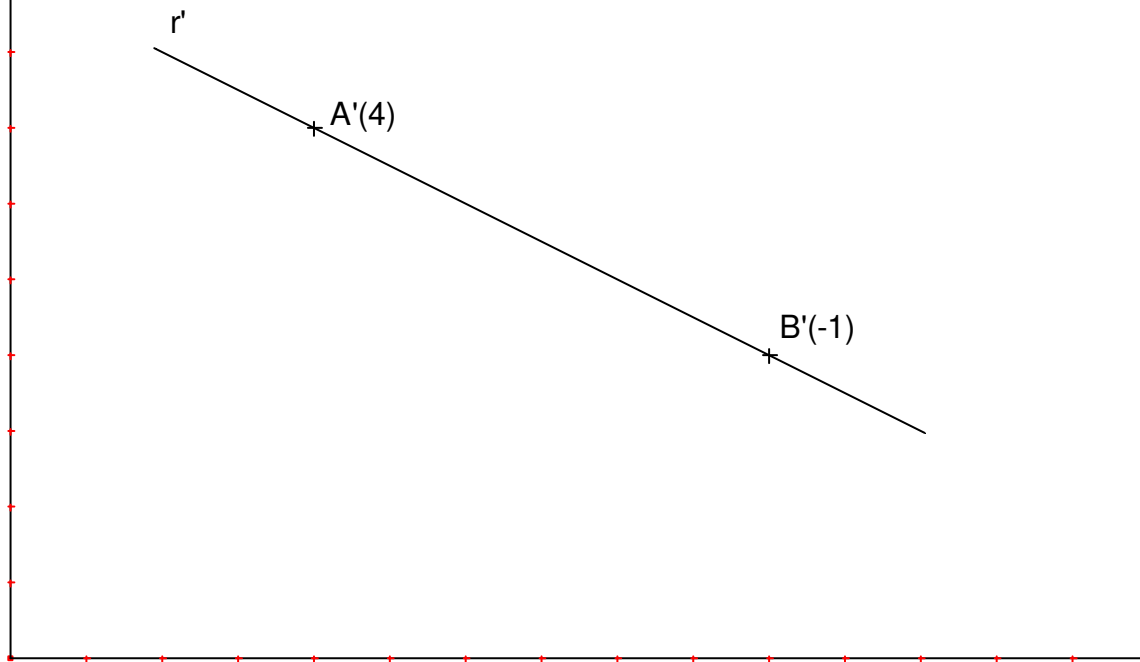
b) A(3 ; 5; 3,4) B(7 ; 2 ; -1,6)



Exercícios Propostos

1) Encontrar o traço de r sobre π' .
u cm

a) $r(A,B)$



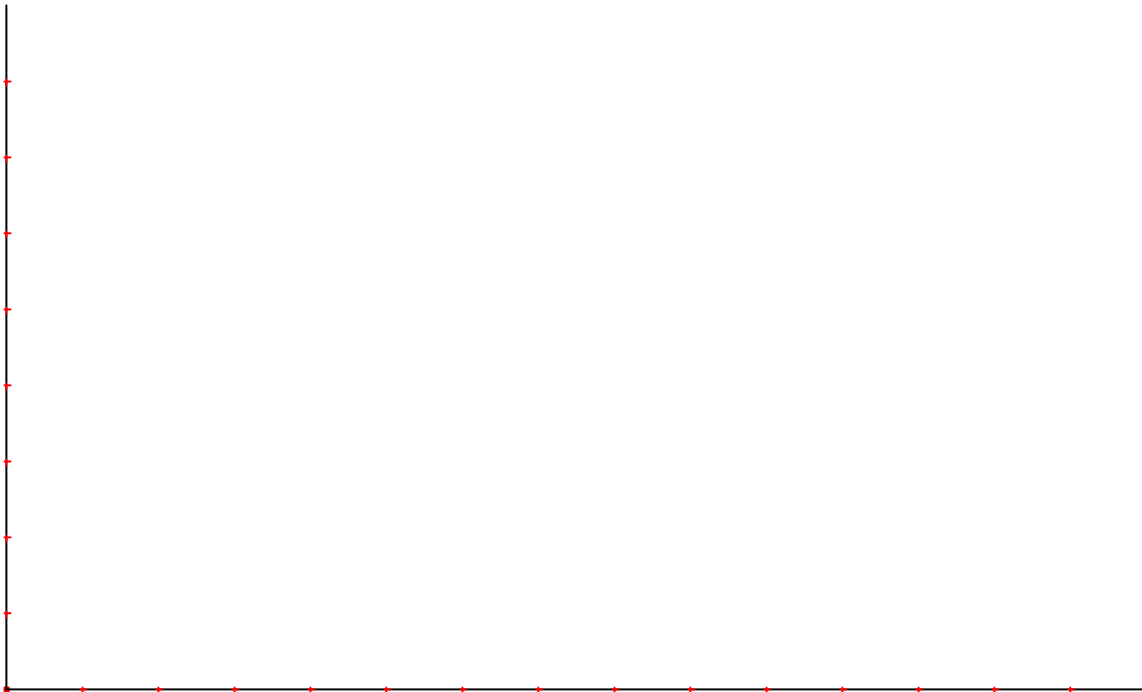
b) $r(C,D)$, $C(3, 2, 2)$ $D(6, 4, 5)$



2) Obter o ângulo θ que a reta dada $r(A,B)$ forma com π' , sendo dados $A(2; 4; 3)$ e $B(4; 2; 7,5)$. A unidade é o centímetro.

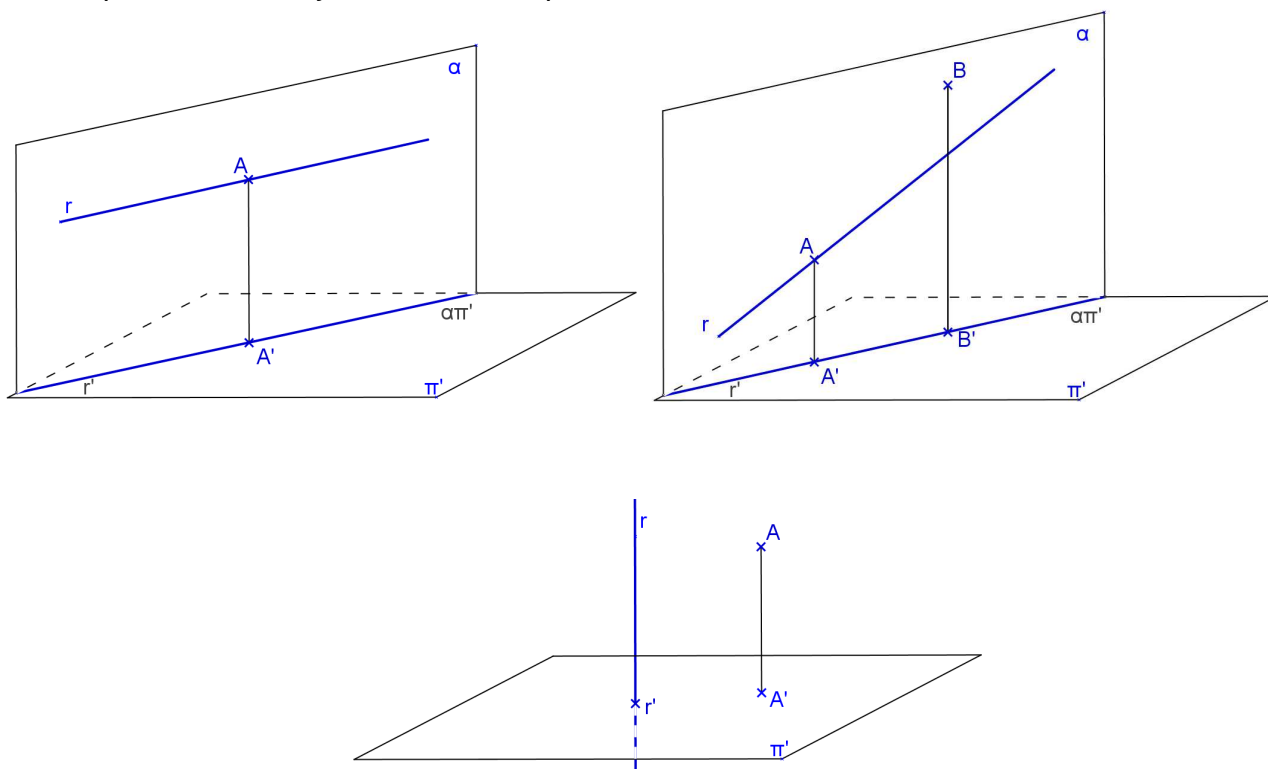


3) Representar a reta r que passe pelos pontos dados $A(4,3,2)$ e $B(6,5,?)$ e forme ângulo dado $\theta=60^\circ$ com π' . Obter a cota do ponto B. A unidade é o centímetro.



4. Pertinência de ponto à reta

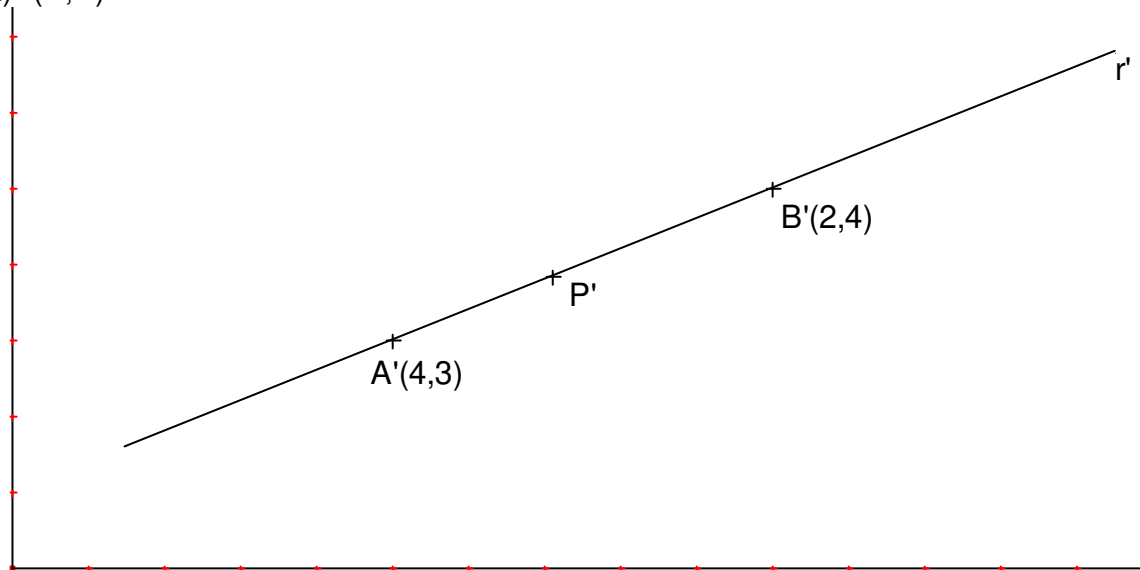
A condição para que um ponto pertença a uma reta é que sua projeção pertença à projeção da reta e que sua cota seja a cota de um ponto da reta.



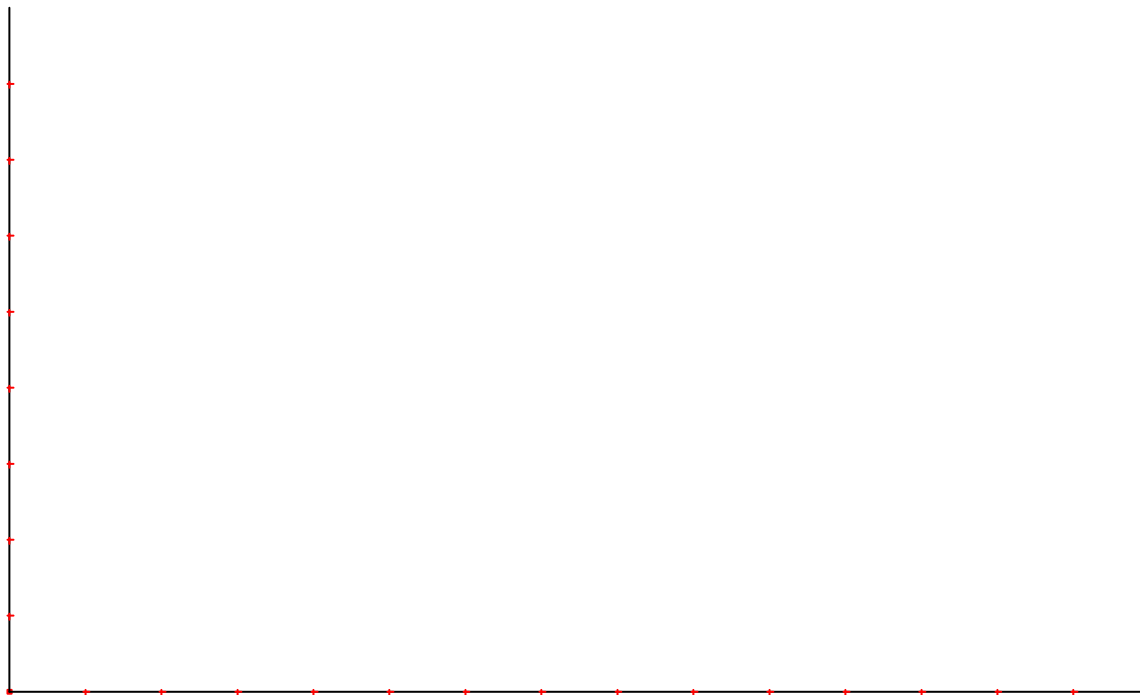
Exercícios

1) Obter o ponto P pertencente a uma reta dada r. Obter pontos de cotas inteiras da reta. u cm

a) r(A,B)



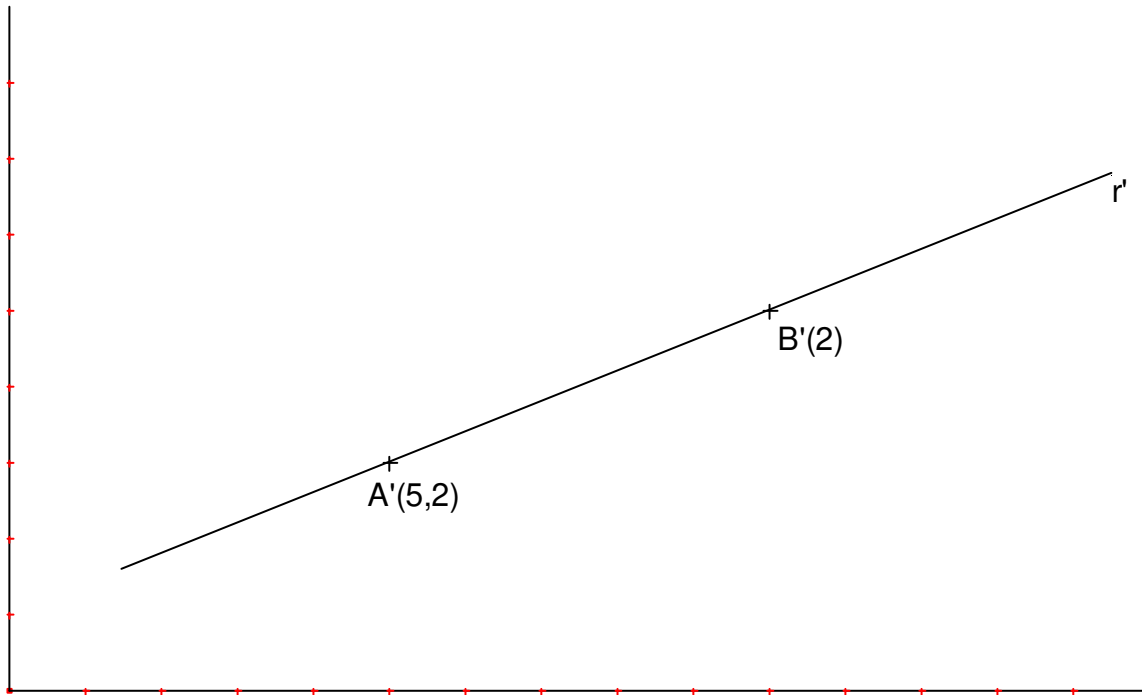
b) $r(C, D)$, $C(3, 3, 4)$ $D(5, 7, 6)$ $P(2, ?, ?)$



c) $r(E, F)$, $E(8, 6, -2)$ $F(12, 2, 5)$ $P(?, 3, ?)$



2) Representar um ponto P da reta dada $r(A,B)$ sendo dada a sua cota $p=4\text{cm}$.



b) $r(C,D)$ $C(4,5,4)$ $D(8,2,2)$ e $p=1\text{cm}$



5. Posições relativas entre duas retas

$$r \text{ e } s \text{ podem ser } \begin{cases} \text{coplanares} & \begin{cases} \text{paralelas} \\ \text{concorrentes} \\ \text{coincidentes} \end{cases} \\ \text{não – coplanares ou reversas} \end{cases}$$

Vimos propriedade 2: Se $r // s$ então $r' // s'$ ou $r' \equiv s'$ ou são pontuais.

5.1. Condições de paralelismo

1º) Retas verticais

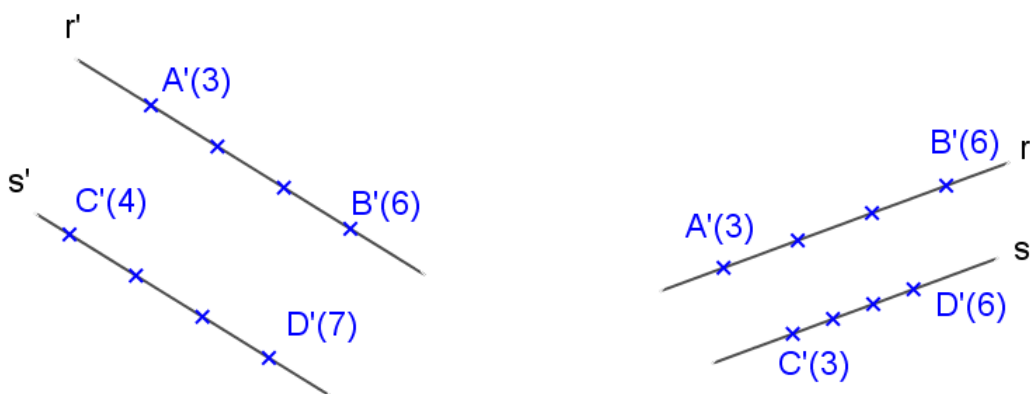
r e s verticais sempre serão paralelas ou coincidentes.

2º) Retas horizontais

$r // s$, ambas horizontais $\Leftrightarrow r' // s'$

3º) Retas quaisquer

$$r // s, \text{ ambas quaisquer} \Leftrightarrow \begin{cases} r' // s' \text{ ou } r' \equiv s' \text{ e} \\ l_r = l_s \text{ e} \\ g_r \text{ e } g_s \text{ crescem no mesmo sentido} \end{cases}$$



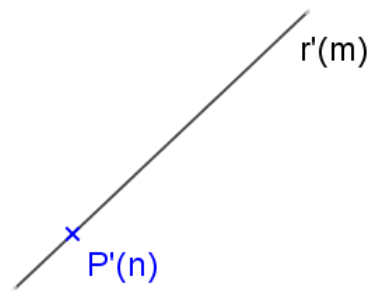
Exercício:

Representar a reta s pertencente a um ponto dado P e paralela a uma reta dada r.

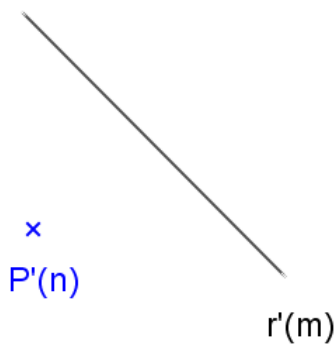
a)



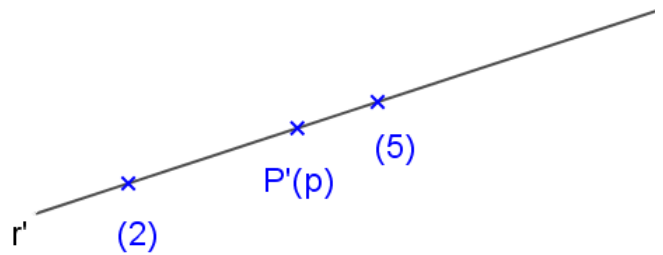
b)



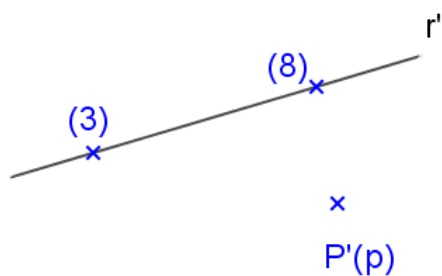
c)



d)



e)



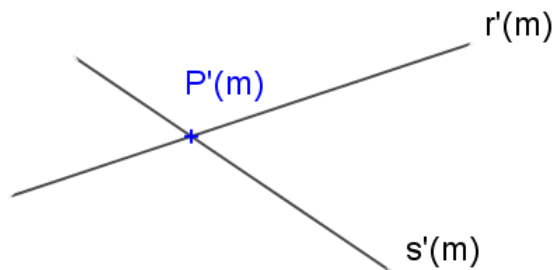
5.2. Condições de incidência

Sejam $r(A,B)$ e $s(C,D)$

r pode ser $\begin{cases} \text{horizontal} \\ \text{vertical} \\ \text{qualquer} \end{cases}$ e s pode ser $\begin{cases} \text{horizontal} \\ \text{vertical} \\ \text{qualquer} \end{cases}$

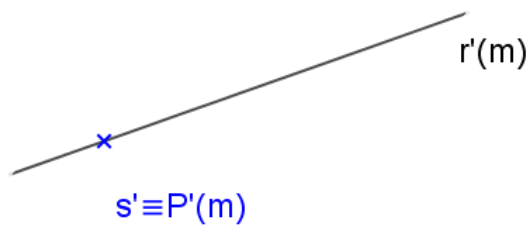
1º) r horizontal e s horizontal

$r \times s \Leftrightarrow$ Cotas iguais e projeções concorrentes.



2º) r horizontal e s vertical

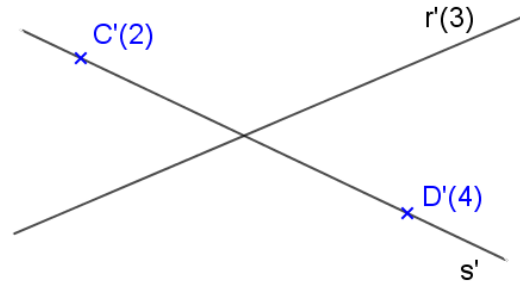
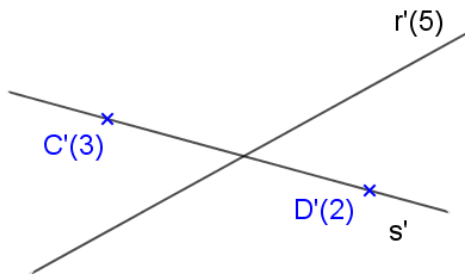
$r \times s \Leftrightarrow s' \in r'$



|

3º) r horizontal e s qualquer

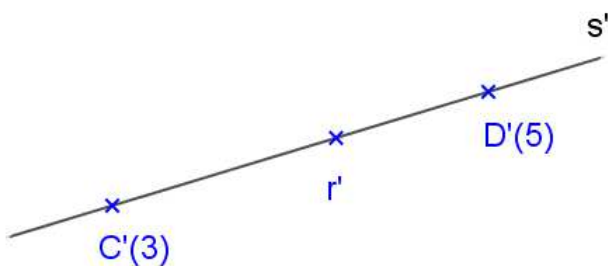
$$r \times s \Leftrightarrow \begin{cases} - r' \times s' \\ - (rs) \text{ tem mesma cota quando} \\ \text{considerado de r e de s} \end{cases}$$

4º) r vertical e s vertical

Serão paralelas ou coincidentes.

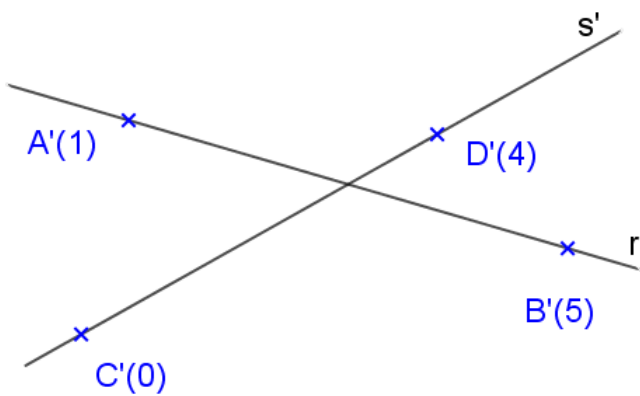
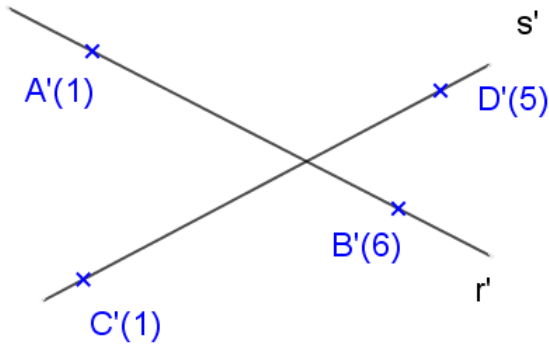
5º) r vertical e s qualquer

$$r \times s \Leftrightarrow r' \in s'$$

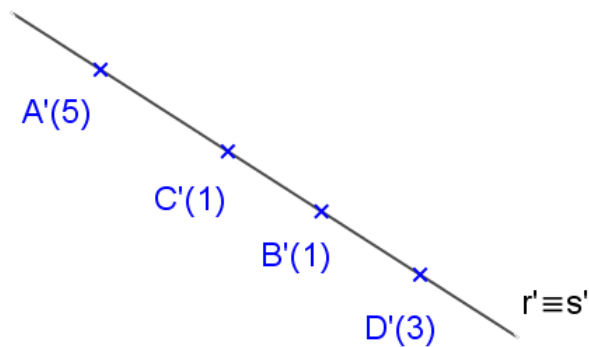


6º) r qualquer e s qualquer

a) Planos projetantes distintos e não paralelos – podem ser concorrentes ou reversas



b) Mesmo plano projetante – podem ser concorrentes ou paralelas $r(A, B)$, $s(C, D)$.



6. Retas perpendiculares ou ortogonais

Relembrando a Propriedade:

$$\text{Se } \begin{array}{l} (1) r \perp s \text{ (ou } r \perp s) \\ (2) r // \pi' \text{ (ou } r \subset \pi') \\ (3) s \not\perp \pi' \end{array} \Rightarrow (4) r' \perp s'$$

As recíprocas são válidas:

$$\text{Se } \begin{array}{l} (2) r // \pi' \text{ (ou } r \subset \pi') \\ (3) s \not\perp \pi' \\ (4) r' \perp s' \end{array} \Rightarrow (1) r \perp s \text{ (ou } r \perp s)$$

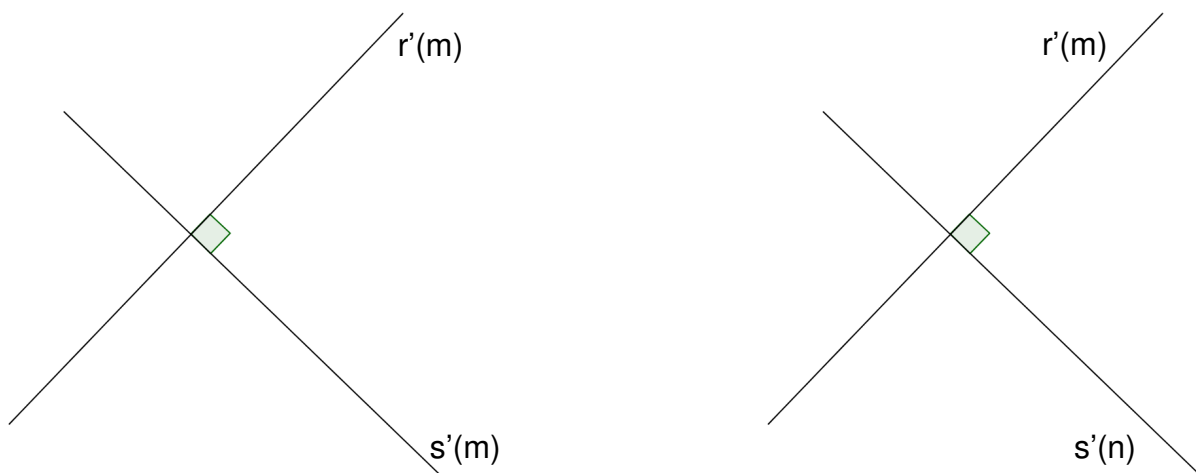
$$\text{Se } \begin{array}{l} (1) r \perp s \text{ (ou } r \perp s) \\ (4) r' \perp s' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (3) s \not\perp \pi' \\ (2) r // \pi' \text{ (ou } r \subset \pi') \end{array}$$

Na projeção cilíndrica ortogonal tem-se que um ângulo não reto somente se projeta em VG quando dois lados forem paralelos ao plano de projeção. Porém, se o ângulo for reto, basta um só lado ser paralelo (ou estar contido) e o outro ser não perpendicular ao plano de projeção para que ele tenha projeção ortogonal em VG.

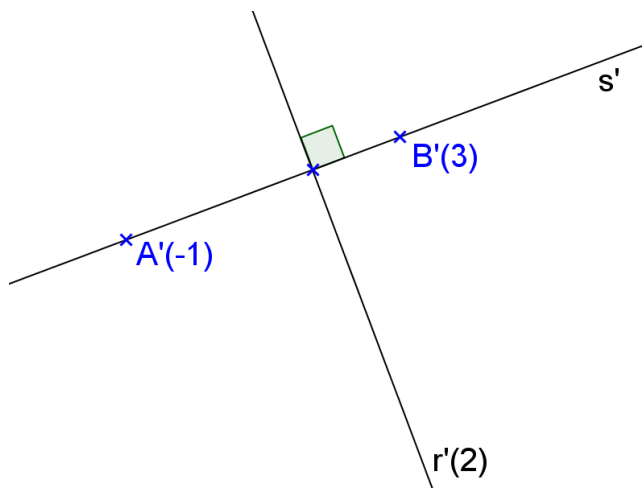
Sejam duas retas r e s então podemos ter:

1º) r horizontal e s horizontal

a) perpendiculares – ângulo reto e cotas iguais b) ortogonais – ângulo reto e cotas diferentes



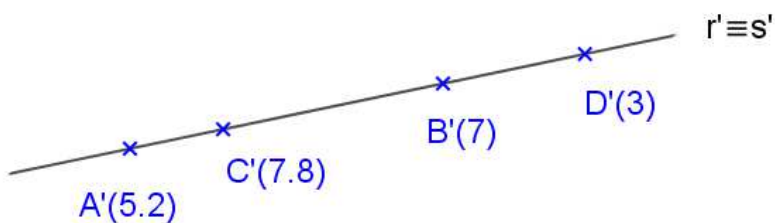
2º) r horizontal e s qualquer e pertencentes a planos projetantes distintos e não paralelos



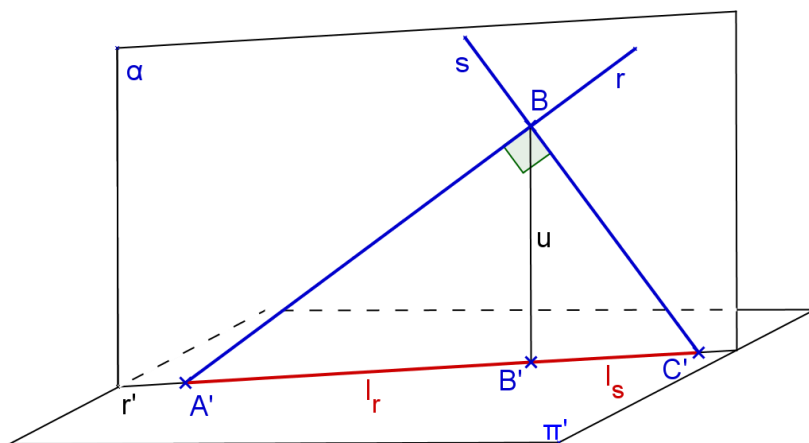
3º) r qualquer e s qualquer

E pertencentes ao mesmo plano projetante ou a planos projetantes paralelos

Solução 1: rebater o plano projetante



Solução 2: trabalhar com o intervalo (ou a equidistância) delas

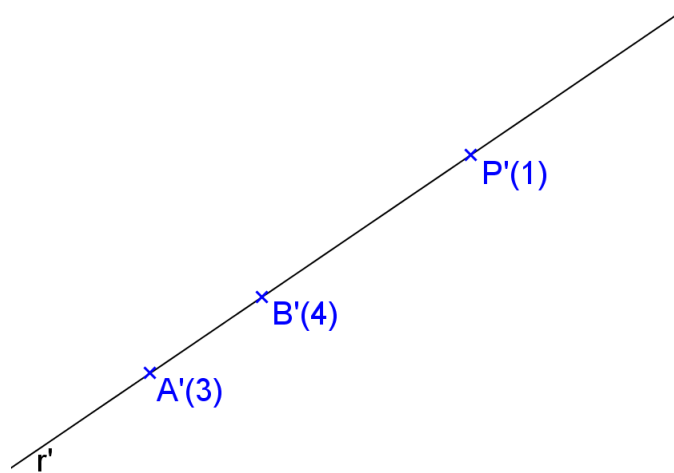


$$\begin{cases} r' // s' \text{ ou } r' \equiv s' \\ l_r = \frac{1}{l_s} \\ g_r \uparrow \quad g_s \downarrow \end{cases}$$

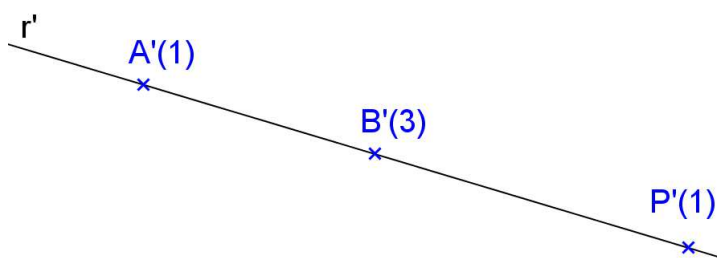
Exercícios Propostos:

1) Representar a reta s pertencente ao ponto dado P e perpendicular a uma reta dada $r(A,B)$, sabendo-se que seus planos projetantes são coincidentes.

a)

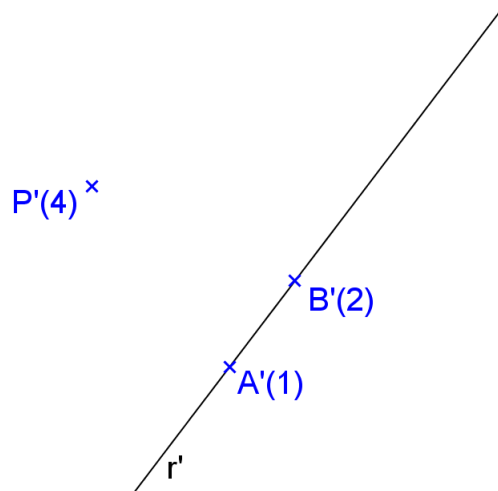


b)

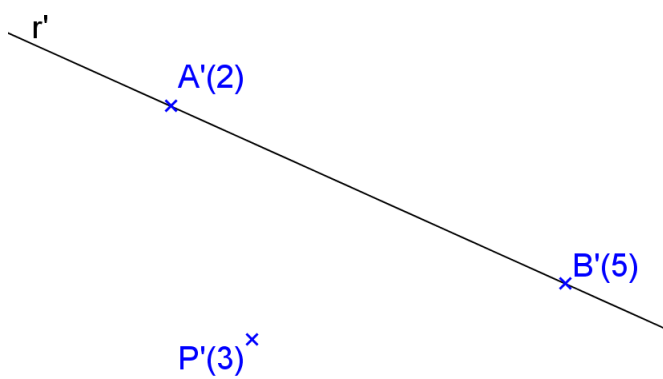


2) Representar a reta s pertencente ao ponto dado P e ortogonal a uma reta dada $r(A,B)$, sabendo-se que seus planos projetantes são paralelos.

a)



b)



Capítulo IV – Representação do plano

1. Representação do plano

Um plano fica determinado por:

- Três pontos não colineares;
- Um ponto e uma reta que não se pertencem;
- Duas retas concorrentes ou paralelas.

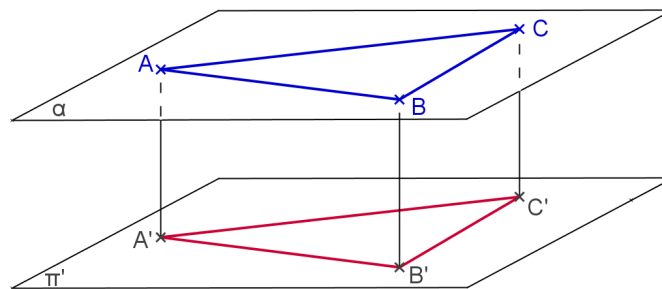
2. Posições relativas de um plano em relação ao Plano de Projeção

α e π' podem ser

- { paralelos
- { perpendiculares (projetantes)
- { oblíquos

2.1. Plano horizontal (ou de nível)

Espaço:



Épura:

x
A'(m)

Propriedades:

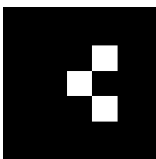
- Cota constante
- Quantidade de pontos que determinam o plano:
- Retas contidas no plano:
- VG:
- Reta perpendicular:
- Pertinência de ponto ao plano:
- Traço:

Exercícios

1. Represente a projeção cotada de uma pirâmide reta de base quadrada, V-ABCD regular, com a base contida no plano horizontal $\alpha(A,B)$ e altura de 4,3cm.

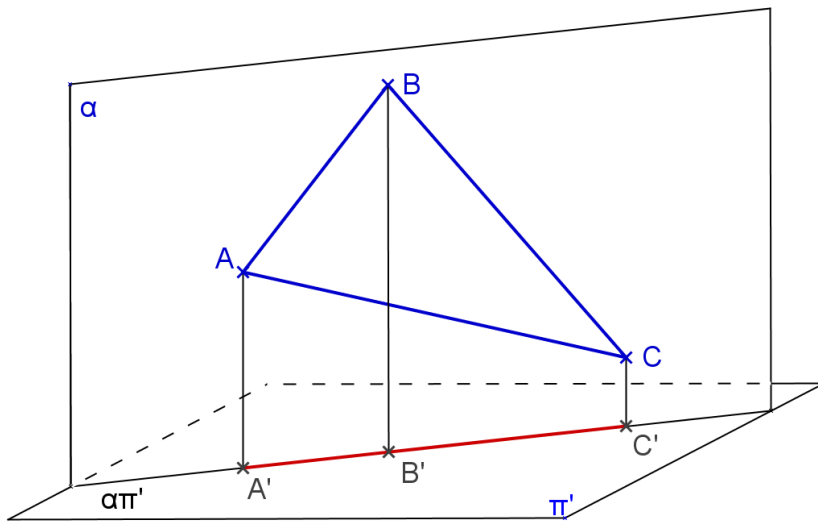


2. Represente a projeção cotada de uma pirâmide de base hexagonal regular, V-ABCDEF, com a base contida no plano horizontal $\alpha(A,B)$, dados os pontos A, B e V.

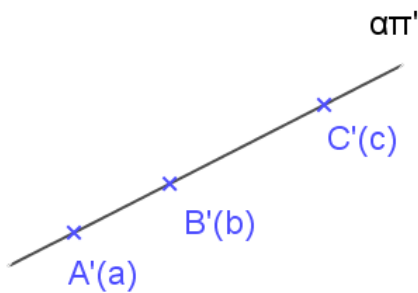


2.2. Plano vertical (ou projetante)

Espaço:



Épura:

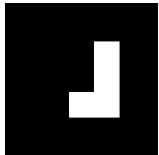


Propriedades:

- Plano projetante: qualquer figura contida neste plano tem sua projeção reduzida a um segmento ou a uma reta. Assim, r pertence a $\alpha \Leftrightarrow r'$ pertence a $\alpha\pi'$.
- Quantidade de pontos que determinam o plano:
- Retas contidas no plano:
- VG:
- Reta perpendicular:
- Pertinência de ponto ao plano:
- Traço:

Exercício

1. Represente as projeções da pirâmide regular, de base quadrada, V-ABCD, com a base contida no plano vertical $\alpha(A,B)$ e altura de 4cm.



A'(1)
x

B'(2)
x

2. Represente as projeções do prisma reto de base hexagonal regular ABCDEF - GHIJKL, com uma base contida no plano vertical $\alpha(A,B)$ e altura $h = 4$ cm.

x

A'(2.5)

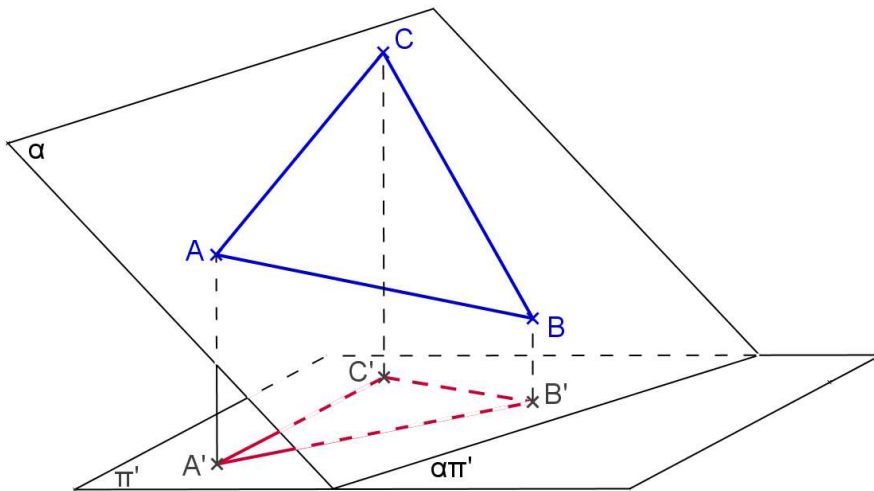
x

B'(1)

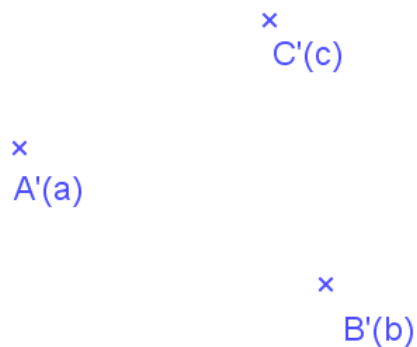


2.3. Plano qualquer

Espaço:



Épura:



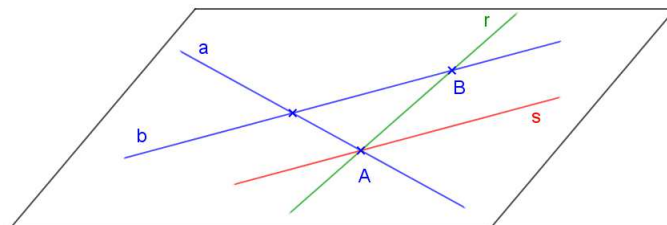
Propriedades:

- a) Quantidade de pontos que determinam o plano:
- b) Retas contidas no plano:
- c) VG:
- d) Reta perpendicular:
- e) Pertinência de ponto ao plano:
- f) traço:

3. Pertinência de ponto e reta a um plano qualquer

3.1. Pertinência de reta a plano qualquer

$$r \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} r \times a, r \times b, \text{ em pontos distintos, onde } a, b \subset \alpha \\ r \times a, r // b, \text{ onde } a, b \subset \alpha \end{cases}$$



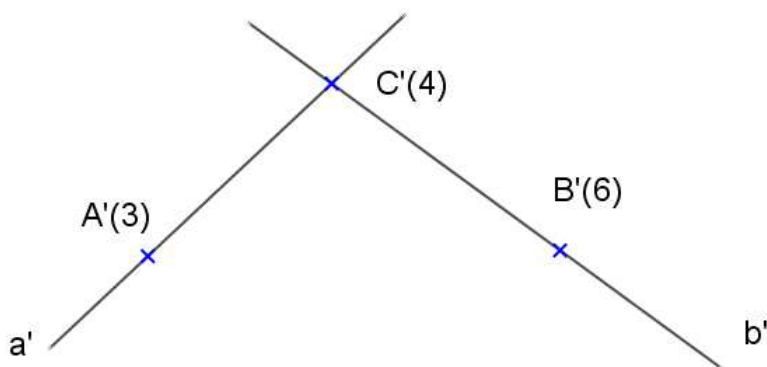
3.2. Pertinência de ponto a plano qualquer

$$P \in \alpha \Leftrightarrow P \in r \text{ e } r \subset \alpha$$

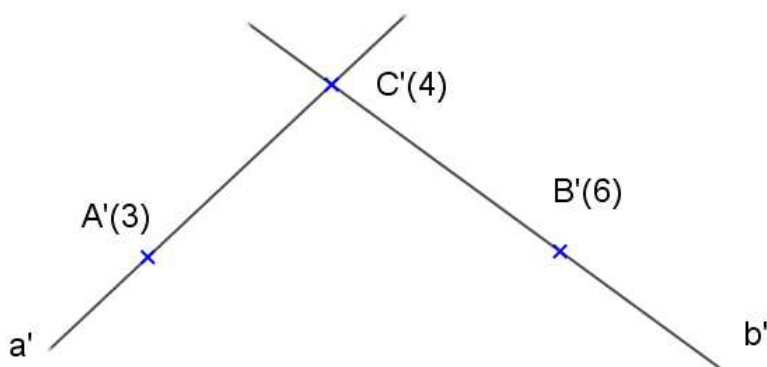
Exercícios:

1) Representar uma reta r pertencente ao plano dado $\alpha(a,b)$

a) considerar $r \times a$ e $r // b$

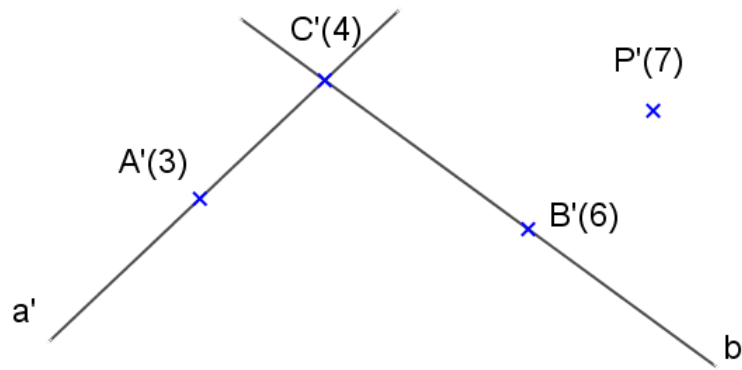


b) considerar $r \times a$ e $r \times b$

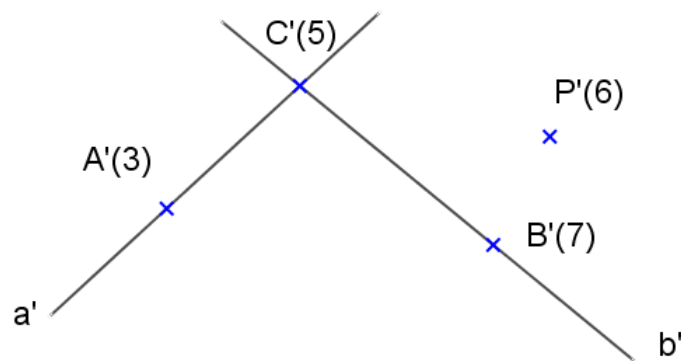


2) Verificar se o ponto P pertence ao plano $\alpha(a,b)$

a)

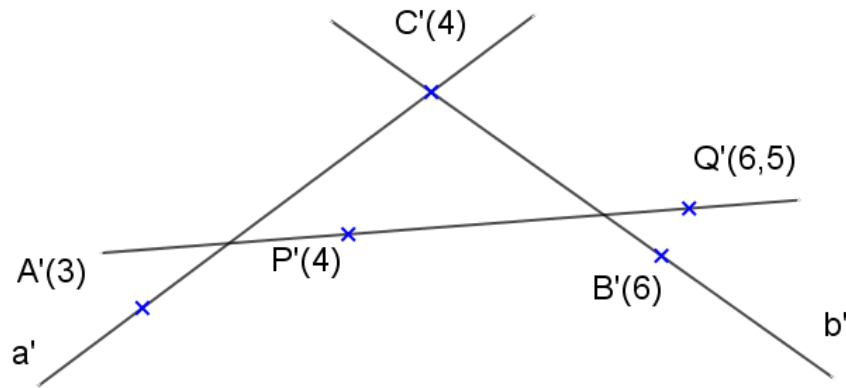


b)

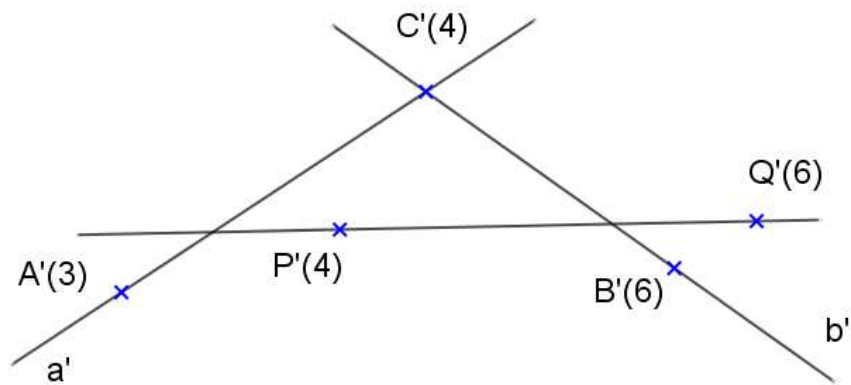


3) Verificar se a reta dada $r(P,Q)$ pertence ao plano dado $\alpha(a,b)$

a)



b)



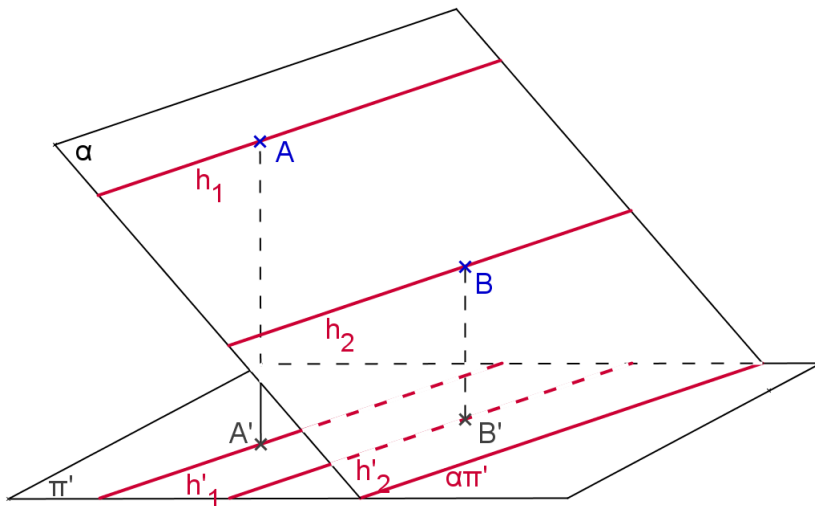
3.3 Elementos de um plano qualquer

1º) Horizontais de um plano

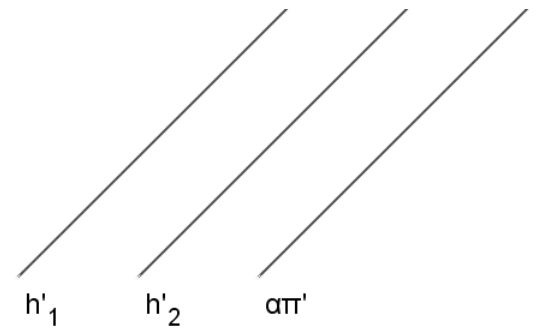
As horizontais de um plano qualquer são as retas de cota constante, ou seja, são as retas horizontais que estão contidas no plano.

Observação: As horizontais de um plano são sempre paralelas entre si

Espaço:

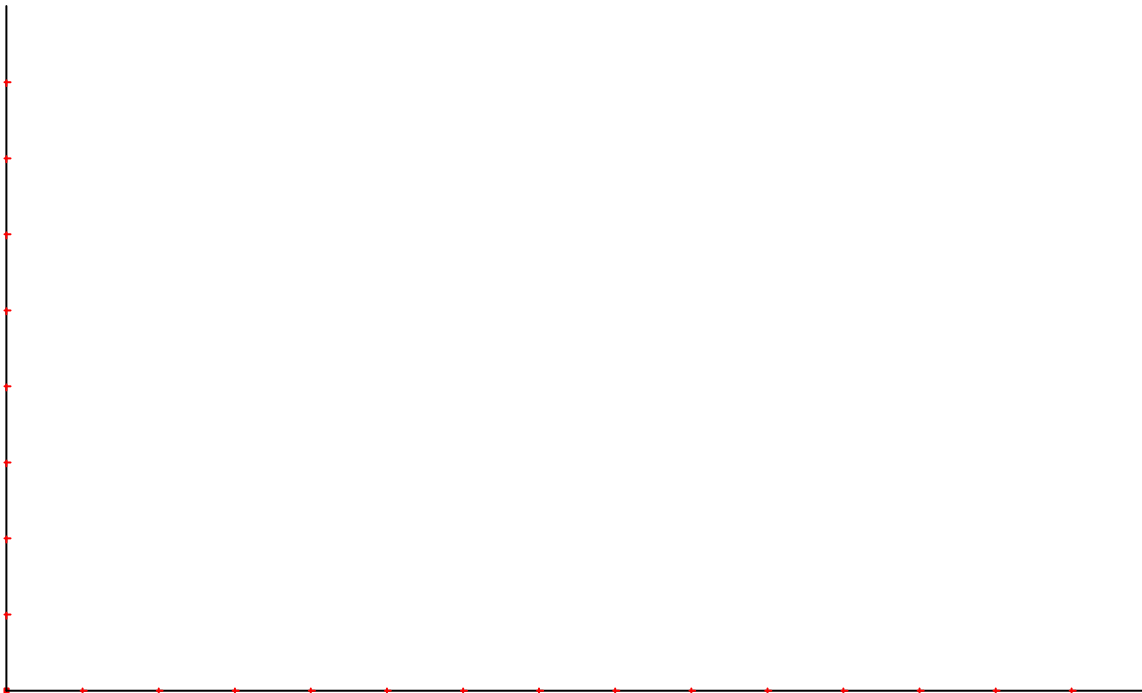


Épura:

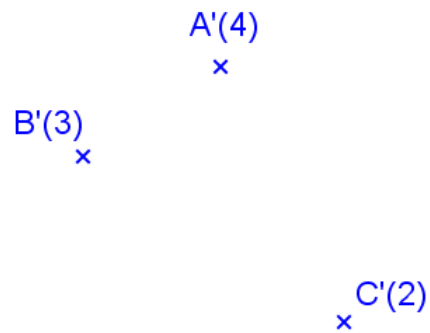


Exercícios:

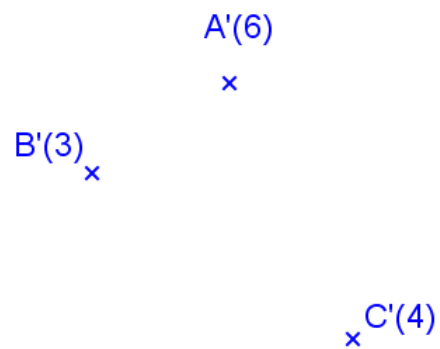
- Dado o plano $\alpha(A,B,C)$, encontrar a horizontal do plano conduzida pelo ponto B.
Dados: A(60, 60, 50) B(10, 20, 25) C(80, 10, 10)



2. Determinar o traço do plano $\alpha(A,B,C)$ sobre o plano π' ($\alpha\pi'$).



3. Representar a horizontal de α sabendo-se que a mesma tem uma cota $c=1$ dada.



4. Obter a cota de um ponto P pertencente a um plano $\alpha(A,B,C)$ qualquer, sendo dada a sua projeção.



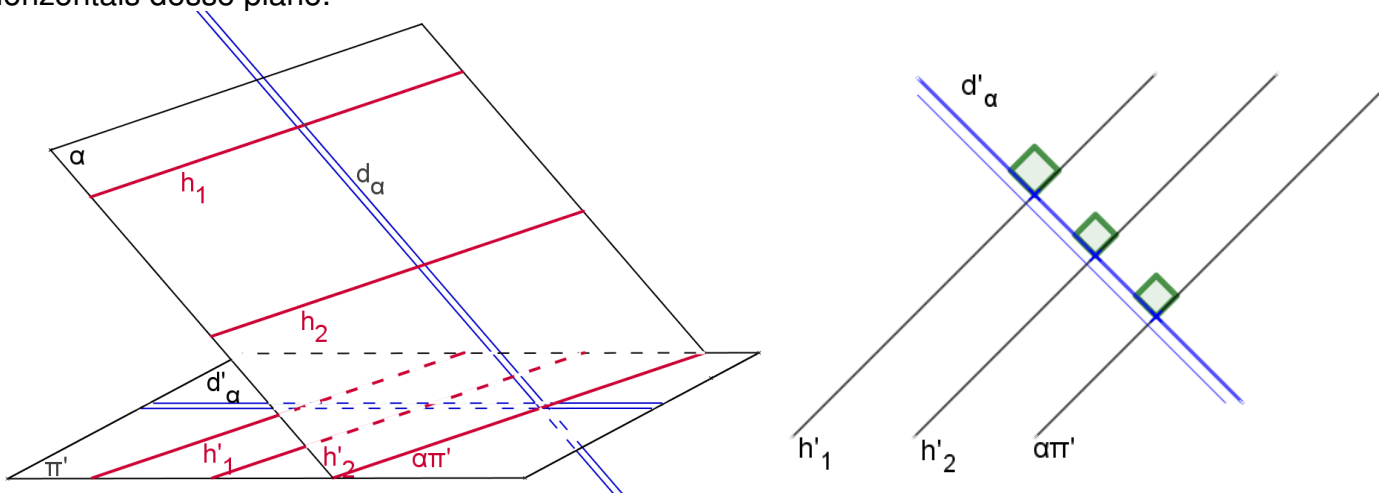
5. Dado o plano $\alpha(A,B,C)$ representar a reta r conduzida pelo ponto D do plano α e paralela à reta AC.

Dados: A(10, 40, 30) B(70, 60, 80) C(40, 10, 50) D(70, 40, ?)



2º) Reta de declive de um plano

Definição: a reta de declive de um plano é uma reta deste plano que é perpendicular às horizontais desse plano.

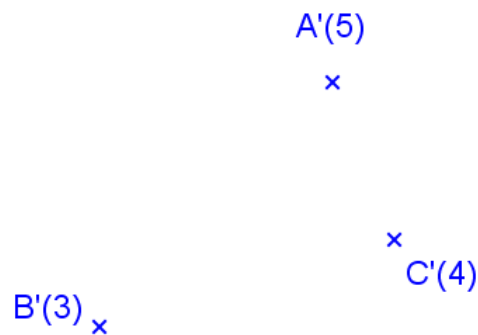


Propriedades:

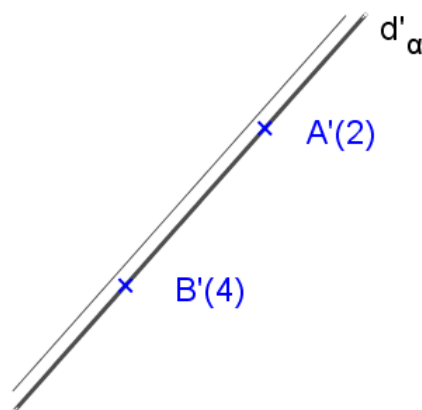
- 1ª) Todas as retas de declive de α são paralelas entre si.
- 2ª) Graduar a reta de declive de um plano significa representar sua escala de declive.
- 3ª) Uma reta de declive de um plano qualquer é suficiente para representá-lo.

Exercícios:

1. Representar uma das retas de declive de um plano $\alpha(A,B,C)$ qualquer dado.



2. Dado o plano qualquer α por uma reta d_α de declive, representar outras retas deste plano.



3º) Inclinação de um plano

Propriedades:

- 1ª) A inclinação de um plano é a inclinação de uma de suas retas de declive.
- 2ª) O ângulo entre α e π' é o ângulo formado por d e π' .

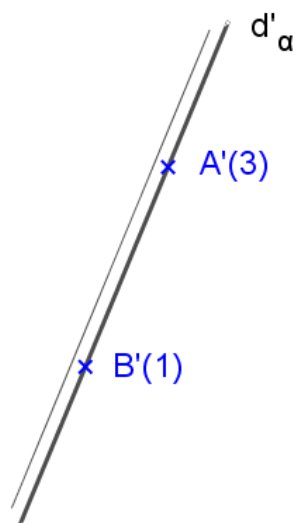
Exercícios:

1. Encontrar o ângulo que o plano $\alpha(A, B, C)$ forma com o plano π' .

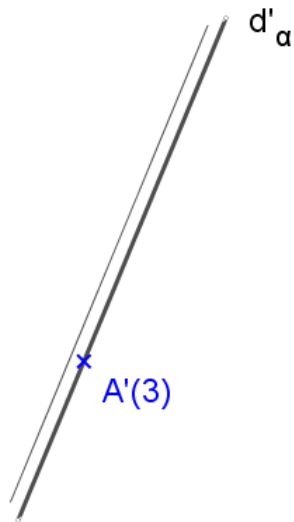
Dados: A(10, 20, 15), B(40, 70, 50) C(70, 10, -10)



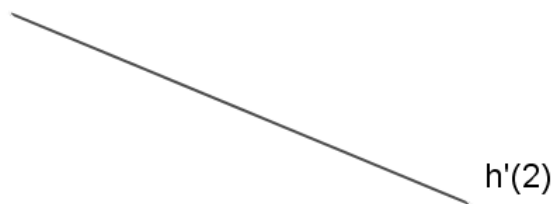
2. Encontrar o ângulo θ que o plano $\alpha(d_\alpha)$ forma com π' .



3. Representar o plano $\alpha(d)$ que forma 30° com o plano π' .

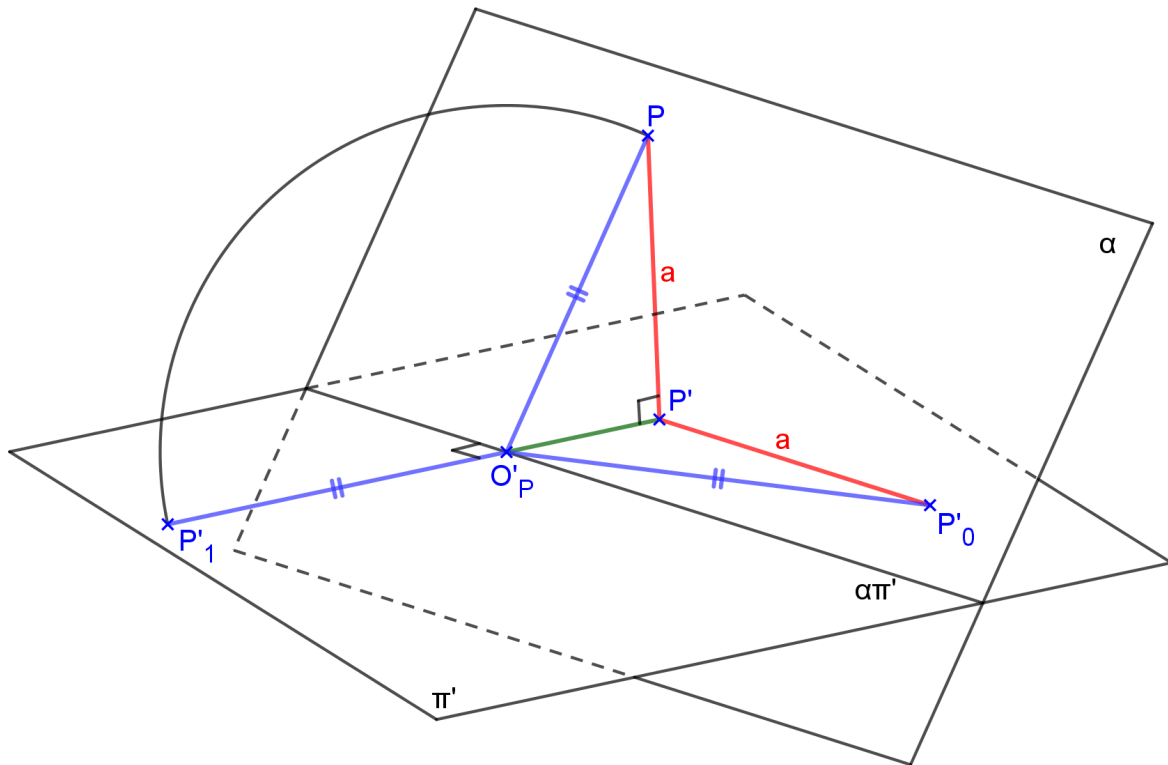


4. Representar um plano α que contenha a reta dada h e forme ângulo de 60° com π' .

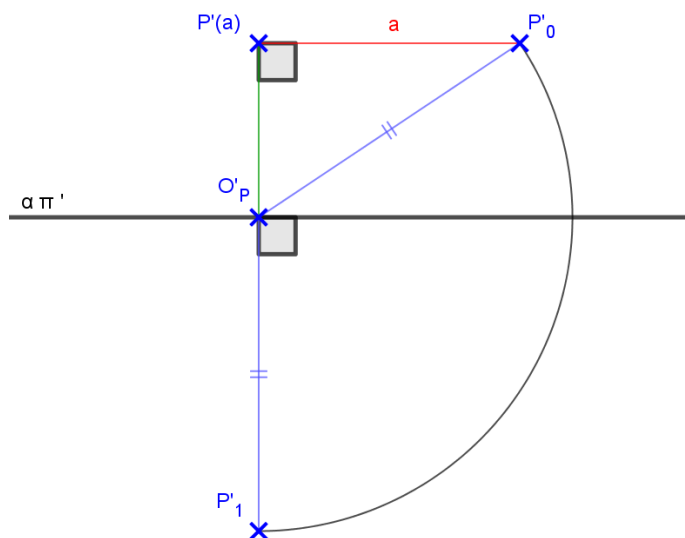


4. Rebatimento do Plano Qualquer

Para determinar a verdadeira grandeza de uma figura contida num plano qualquer, deve-se efetuar o rebatimento do mesmo sobre o plano horizontal π' , ou sobre um outro plano paralelo à π' . O plano α é rotacionado em torno do eixo $\alpha\pi'$, até coincidir com o plano π' . O movimento do plano α em torno do eixo, descreve um arco de circunferência que está contido no plano δ , perpendicular ao plano π' e, portanto a projeção deste arco será um segmento de reta contido no traço do plano δ sobre o plano π' . Para determinar a verdadeira grandeza deste arco, o plano vertical, δ é rebatido em torno da reta $\delta\pi'$. O triângulo $O'P'PP'$ é o triângulo fundamental do rebatimento, sua verdadeira grandeza é representada em épura pelo triângulo $O'P'P'_0$.



Rebatimento sobre π' em épura:



Exercícios:

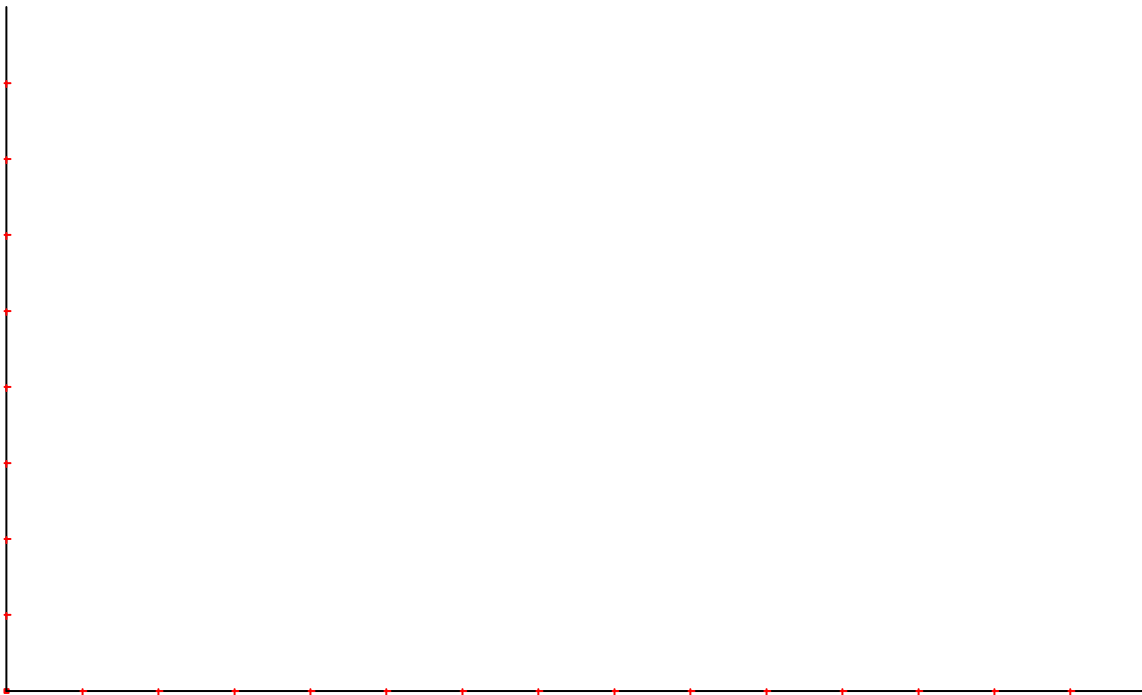
1. Encontrar a Verdadeira Grandeza (VG) do triângulo ABC.

Dados: A (30, 70, 0) B(80, 40, 0) C(80, 80, 40)



2. Encontrar a Verdadeira Grandeza (VG) do triângulo ABC.

Dados: A (10,50,70) B(40,30,30) C(60,70,10)



3. Representar um triângulo equilátero ABC contido num plano qualquer $\alpha(A,B,P)$.
A(40,60,60) B(50,90,80) P(100,80,30)



4. Representar um quadrado ABCD contido num plano qualquer $\alpha(A,B,P)$.
A(60,20,50) B(70,0,70) P(100,10,20)

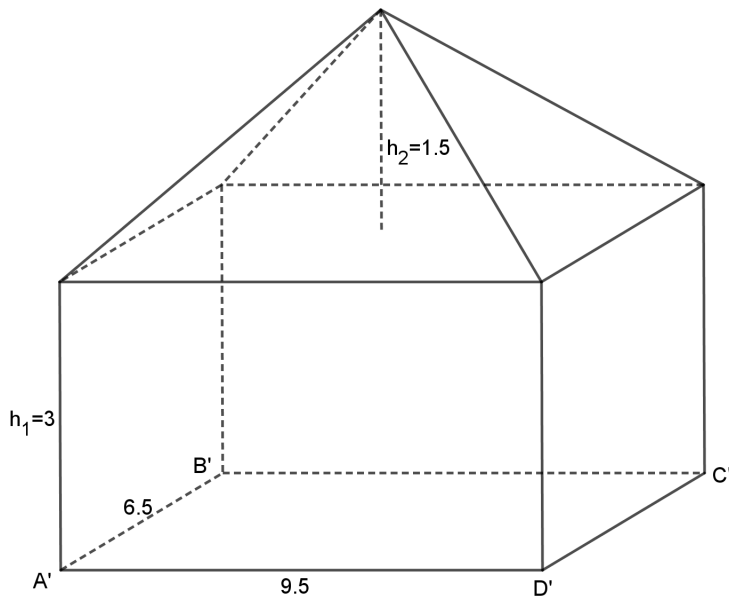


3. Representar a projeção cotada de uma pirâmide regular de base quadrada V-ABCD contida em um plano horizontal, dados os vértices da base A e B, e a altura $h=4,5$. Encontre a VG de uma face lateral usando o rebatimento.

A'(1) x

B'(1) x

4. Representar a projeção cotada do sólido abaixo (prisma de base retangular com uma pirâmide reta com bases em planos horizontais), dado o vértice A e a reta suporte de AB. Encontrar as VGs das faces laterais da pirâmide usando rebatimento.



5. Posição relativa entre dois planos

Dados dois planos quaisquer α e β no espaço, eles podem ser:

$$\alpha \text{ e } \beta \text{ podem ser } \begin{cases} \text{coincidentes} \\ \text{paralelos} \\ \text{secantes } (\perp \text{ ou } \sphericalangle) \end{cases}$$

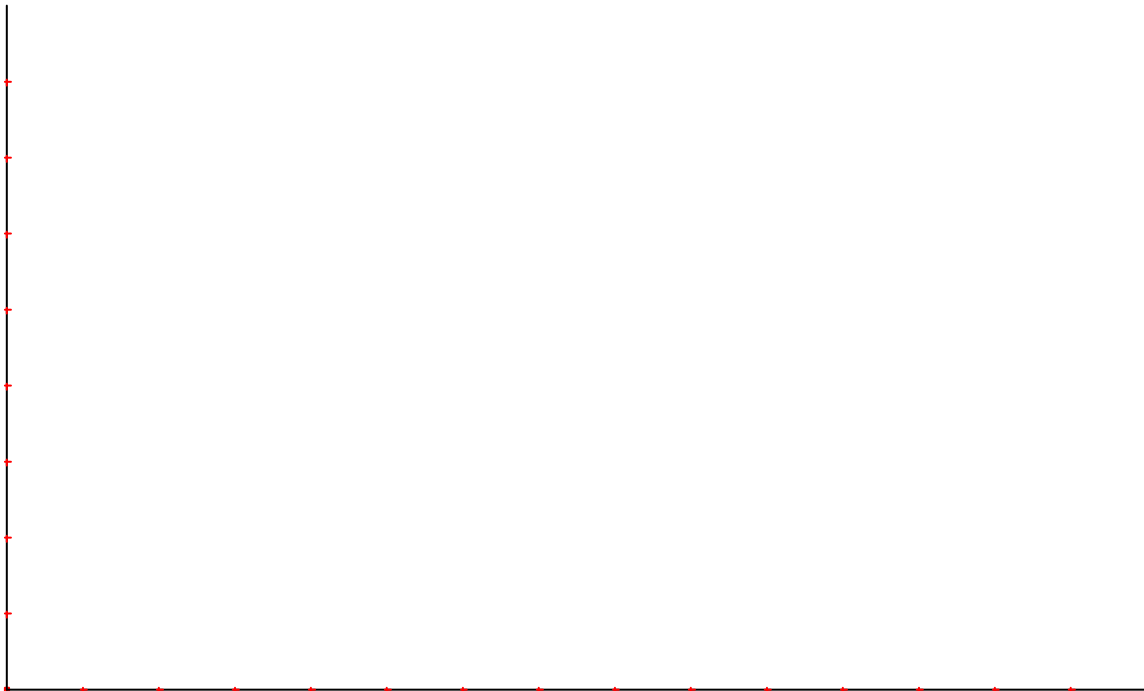
5.1. Condições de paralelismo de dois planos

Sejam α e β dois planos distintos, então:

- Se α e β são horizontais, então α é paralelo à β ;
- Se α e β são verticais, então α é paralelo à β se $\alpha\pi' // \beta\pi'$;
- Se α e β são planos quaisquer, então α é paralelo à β se suas retas de declive forem paralelas, ou seja, suas escalas de declive estão situadas em retas paralelas, seus intervalos são congruentes e suas cotas crescem no mesmo sentido sobre as escalas de declive.

Exercício: Conduzir pelo ponto P, um plano β paralelo ao plano α (A, B, C).

Dados: A(2, 3, 5) B(4, 5, 7) C(6, 1, 3) P(11, 4, 1)



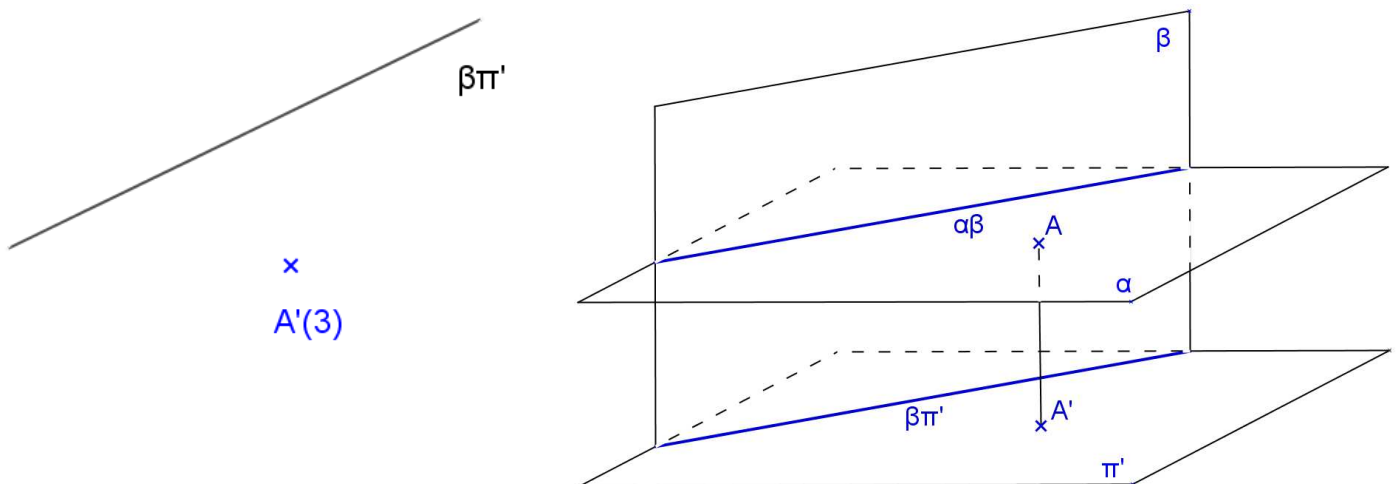
5.2. Planos Não paralelos: Interseção de planos

- Dois planos não paralelos α e β , são concorrentes quando possuem uma reta comum ($\alpha\beta$).
- O traço de um plano horizontal α sobre um plano vertical β é uma reta horizontal ($\alpha\beta$) que possui a mesma cota do plano horizontal α .
- Para determinar o traço entre dois planos quaisquer, utilizam-se planos auxiliares, geralmente horizontais, que facilitam a resolução do problema.

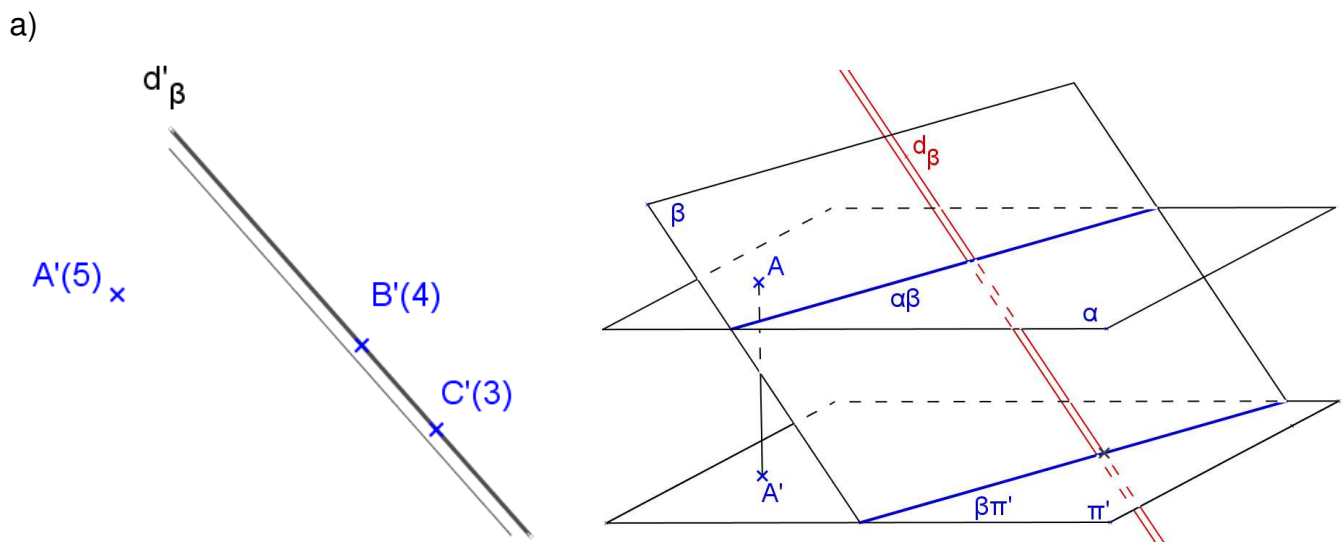
Pode-se considerar os seguintes casos:

1º) $\alpha // \pi'$ e $\beta // \pi'$: neste caso o traço $(\alpha\beta)_{\infty}$ ou não existe.

2º) $\alpha // \pi'$ e $\beta \perp \pi'$: neste caso $(\alpha\beta)' \equiv \beta\pi'$ onde $(\alpha\beta)'_{(\alpha)}$



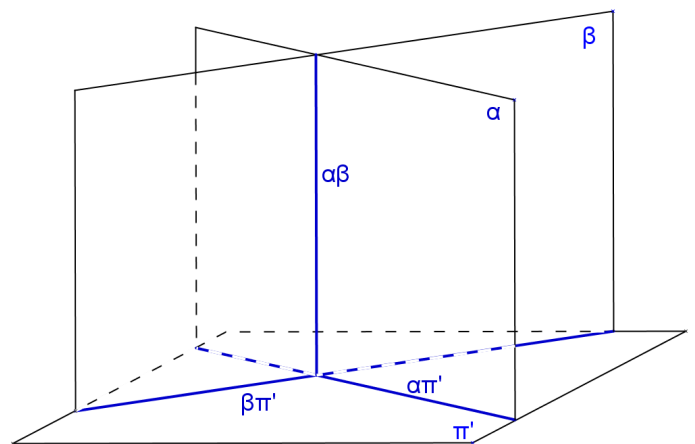
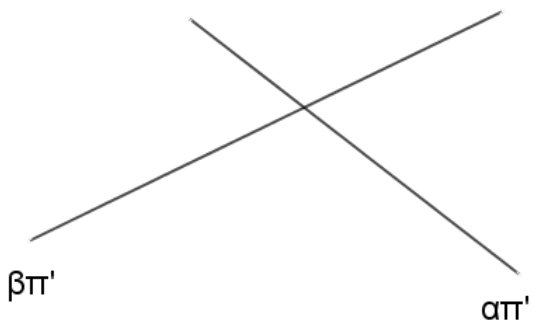
3º) $\alpha // \pi'$ e $\beta \perp \pi'$: neste caso $\alpha\beta // \pi'$.



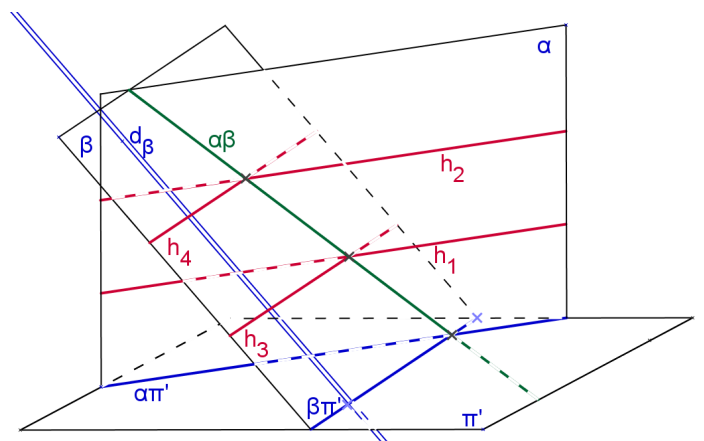
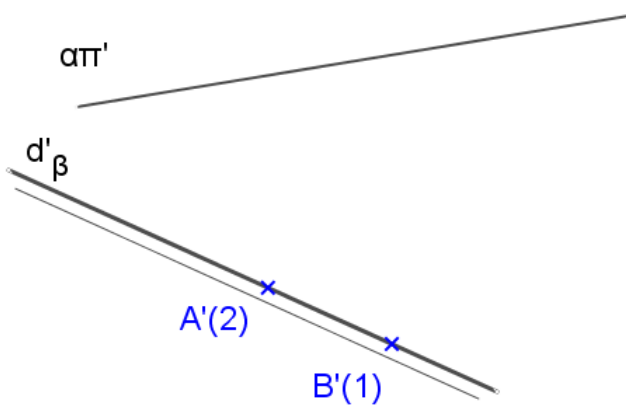
b) α é horizontal de cota $c = 50$, e β (A, B, C), onde: A(50, 10, 20) B(20, 50, 50) C(70, 30, 30)



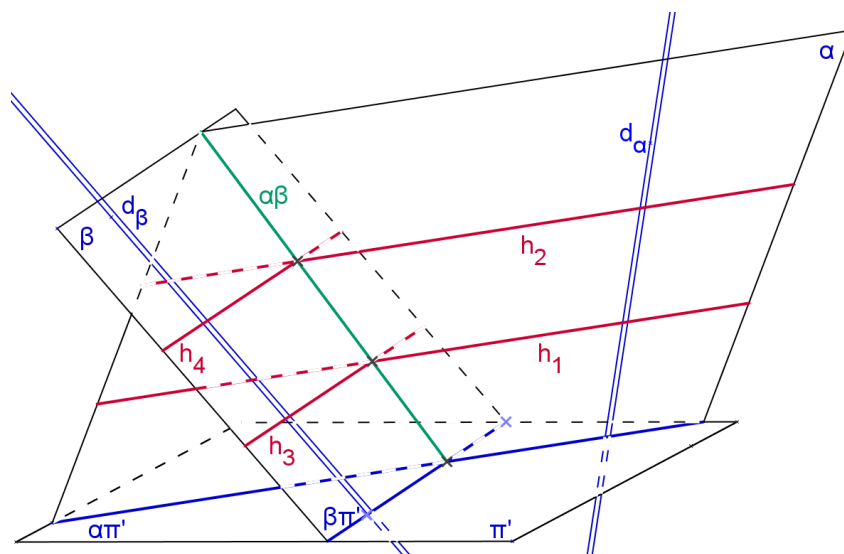
4º) $\alpha \perp \pi'$ e $\beta \perp \pi'$: neste caso $\alpha\beta \perp \pi'$, ou seja, $\alpha\beta$ é uma reta vertical.



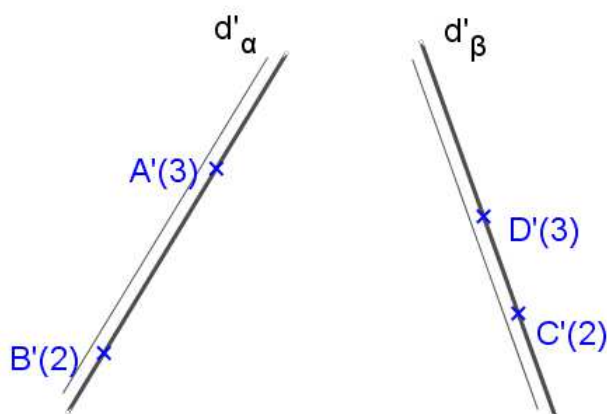
5º) $\alpha \perp \pi'$ e $\beta \perp \pi'$:



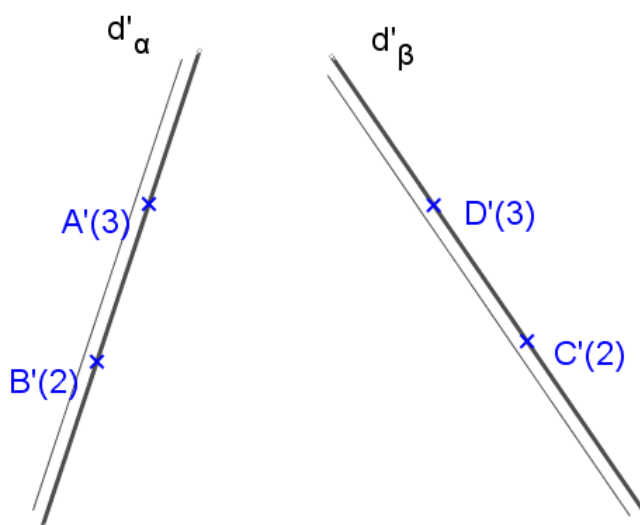
6º) $\alpha \perp \pi'$ e $\beta \perp \pi'$: Sejam $\alpha(d_\alpha)$ e $\beta(d_\beta)$



a) α e β são dados por suas retas de declive.

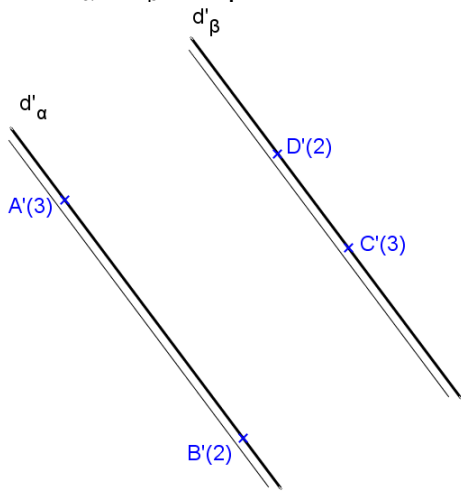


b) Os intervalos de α e β são iguais



Observação: Quando dois planos estão igualmente inclinados então eles se cortam segundo uma reta que é a bissetriz do ângulo formado pelas suas horizontais.

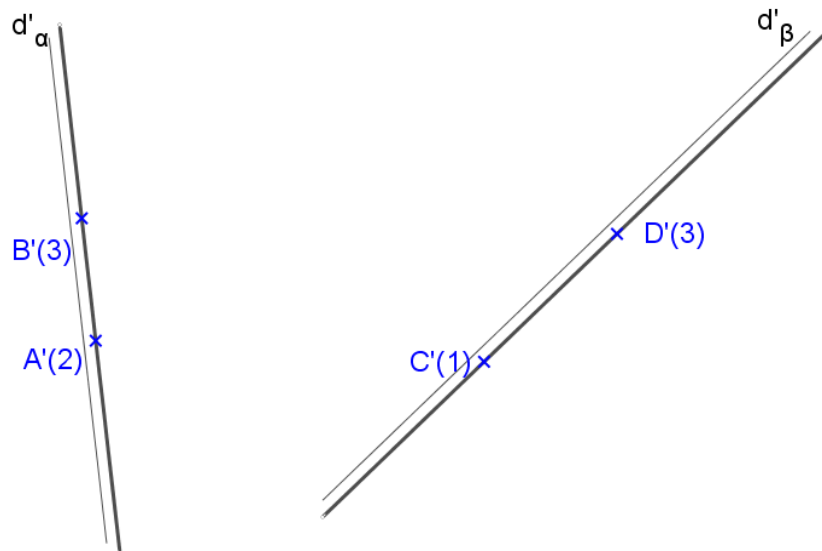
c) As projeções de d_α e d_β são paralelas.



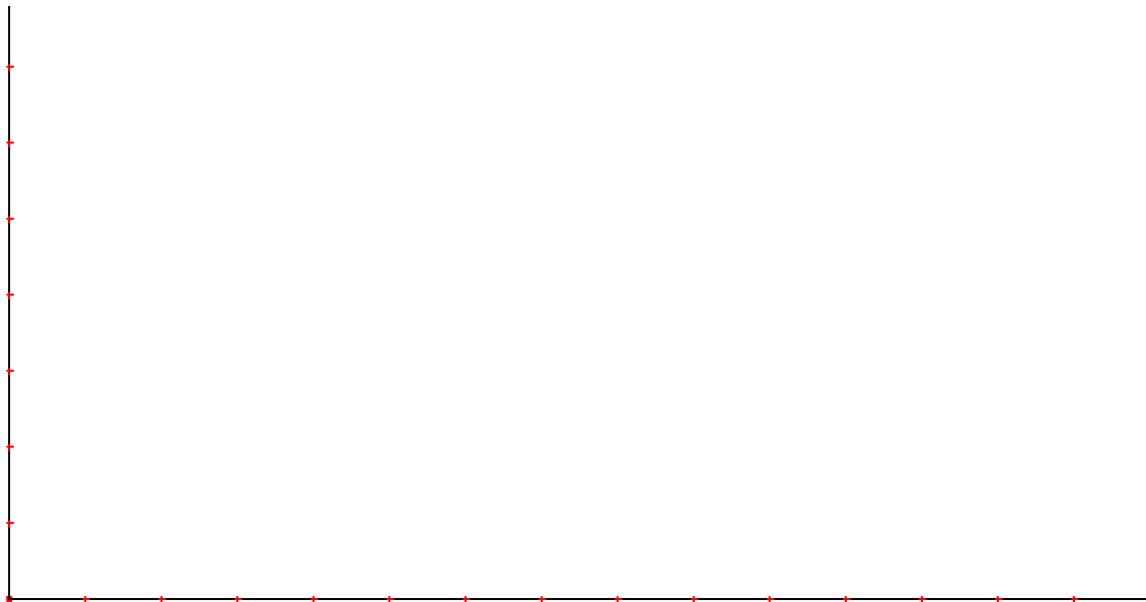
d) $\alpha(A, B, C)$ e $\beta(D, E, F)$, onde: $A(0, 40, 70)$ $B(80, 80, 30)$ $C(50, 0, 10)$
 $D(20, 90, 20)$ $E(-10, 10, 40)$ $F(70, 20, 30)$



e)



f) $\alpha(d_\alpha)$, $\beta(d_\beta)$, $d_\alpha(A,B)$, $d_\beta(C,D)$. Dados: A(5,7,6) B(2,3,1) C(7,6,4) D(9,4,2)



g) $\alpha(d_\alpha)$, $\beta(d_\beta)$, $d_\alpha(A,B)$, $d_\beta(C,D)$. Dados: A(3,4,3) B(2,7,5) C(6,2,7) D(10,6,2)

